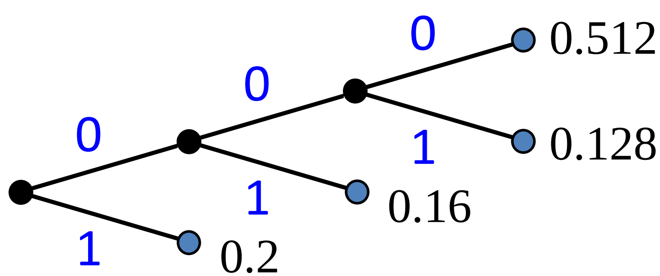
講義「情報理論」

第９回　通信路のモデル

情報理工学専攻 情報知識ネットワーク研究室
喜田拓也

非等長情報源系列の符号化(おさらい)

1, 0を確率0.2, 0.8で発生する無記憶定常情報源 S を考える.
Sから発生する系列を4つ選び，ハフマン符号化を行う.



情報源系列を分割する分節木

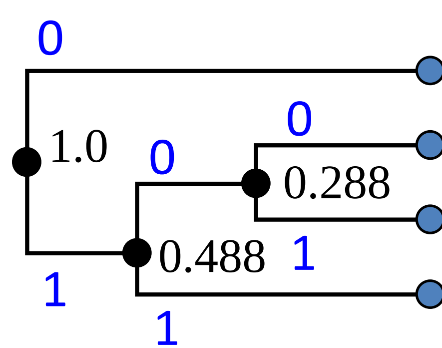
各ブロックの平均長$\overline{n}$は

$$\overline{n} = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.16 + 3 \times 0.128 + 3 \times 0.512 = 2.44$$

右の符号の平均符号長L'＝1.776

よって1記号あたりの平均符号長Lは

$$L = \frac{1.776}{2.44} = 0.728$$



情報源系列	確率	ハフマン符号
0 0 0	0.512	0
0 0 1	0.128	100
0 1	0.16	101
1	0.2	11

ひずみが許される場合の情報源符号化(おさらい)

定理[ひずみが許される場合の情報源符号化定理]

平均ひずみ $\overline{d}$ を D 以下に抑えるという条件の下で，任意の正数ε に対して，情報源S を1情報源記号あたりの平均符号長L が

$$R(D) \leq L < R(D) + \varepsilon$$

となるような2元符号へ符号化できる. しかし，どのような符号化を行っても，$\overline{d} \leq D$ である限り，L をこの式の左辺より小さくすることはできない.

この定理は，1情報源記号あたりの平均符号長を，速度･ひずみ関数$R(D)$ にいくらでも近づく符号化法の存在を示している

具体的な符号化方法はあるのか？

ひずみのない場合に比べてはるかに難しい！

教科書【例5.8】参照

今日の内容

6.1 通信路の統計的表現

6.2 記憶のない定常通信路

6.3 加法的2元通信路

もう一度，情報理論の問題について

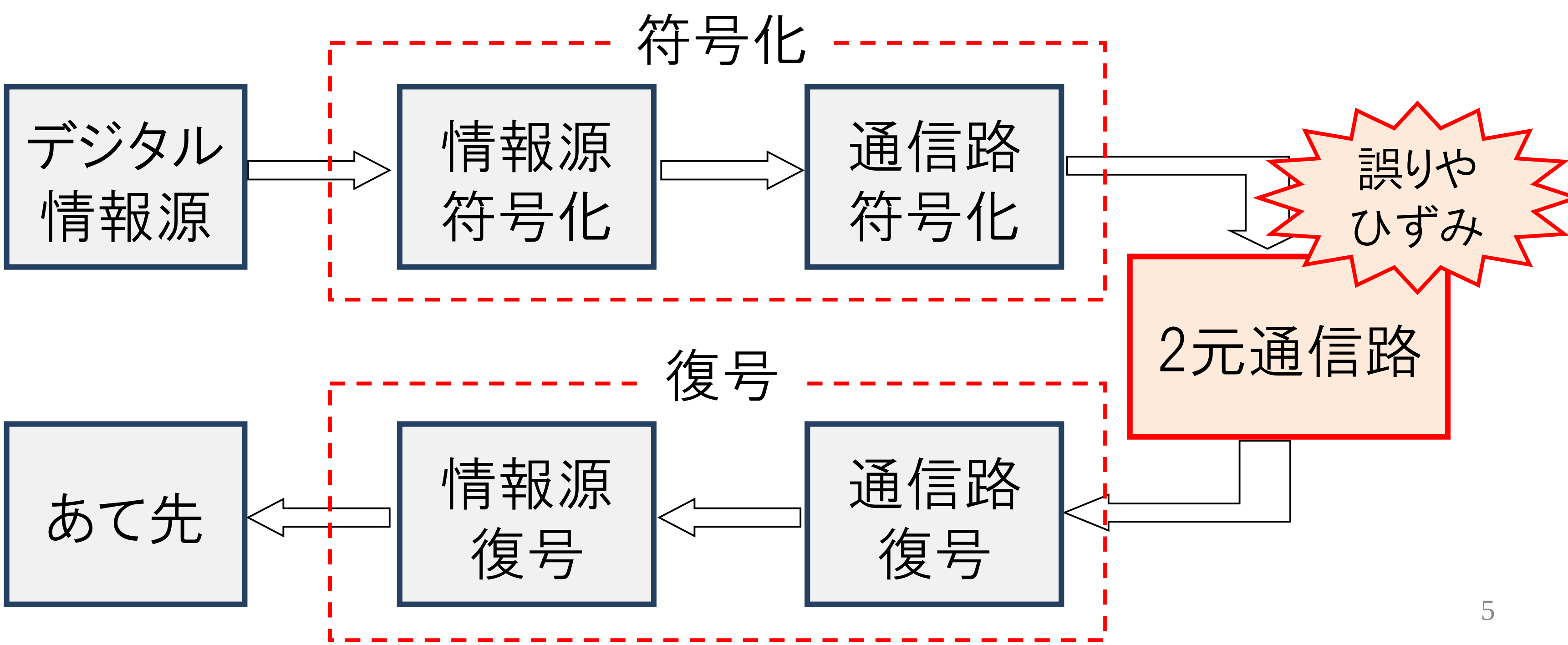
情報理論が取り組む4つの問題

【問題1】できるだけよい情報源符号化法(復号法)を見出すこと

【問題2】情報源符号化の限界を知ること

【問題3】できるだけよい通信路符号化法(復号法)を見出すこと

【問題4】通信路符号化の限界を知ること



通信路の統計的表現

雑音のある離散的通信路の定義：

時点毎に一つの記号が入力され，一つの記号が出力される

出力は入力から一意的に定まるのではなく，

入力アルファベット $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$ $\xrightarrow{X_t}$ 通信路 Communication channel $\xrightarrow{Y_t}$ 出力アルファベット $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_s\}$

$|A|=|B|=r$ のときは，r元通信路（r-ary channel）という

入力$X_0,X_1,\ldots,X_{n-1}$に対する$Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1}$の確率分布

$$P_{Y_0,Y_1\ldots Y_{n-1}|X_0,X_1\ldots X_{n-1}}(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}|x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$$

$$=[X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}\text{の条件の下で}$$

$$Y_0=y_0,Y_1=y_1,\ldots,Y_{n-1}=y_{n-1}\text{となる確率}]$$

記憶のない定常通信路(memoryless channel)

各時点の出力の現れ方が，その時点の入力には関係するが，それ以外の時点の入力･出力とは独立であるような通信路を，記憶のない通信路という

さらに，時間をずらしても統計的性質が変わらないとき，これを記憶のない定常通信路と呼ぶ

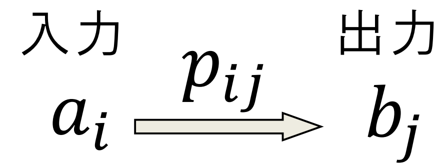
記憶のない定常通信路では，入力Xが通信路に投入されたときに出力Yが出る条件付確率 $P_{Y|X}(y|x)$が，すべての時点において同一である．したがって，

$$P_{Y_0 \ldots Y_{n-1}|X_0 \ldots X_{n-1}}(y_0, \ldots, y_{n-1}|x_0, \ldots, x_{n-1})$$

$$= \boxed{}$$

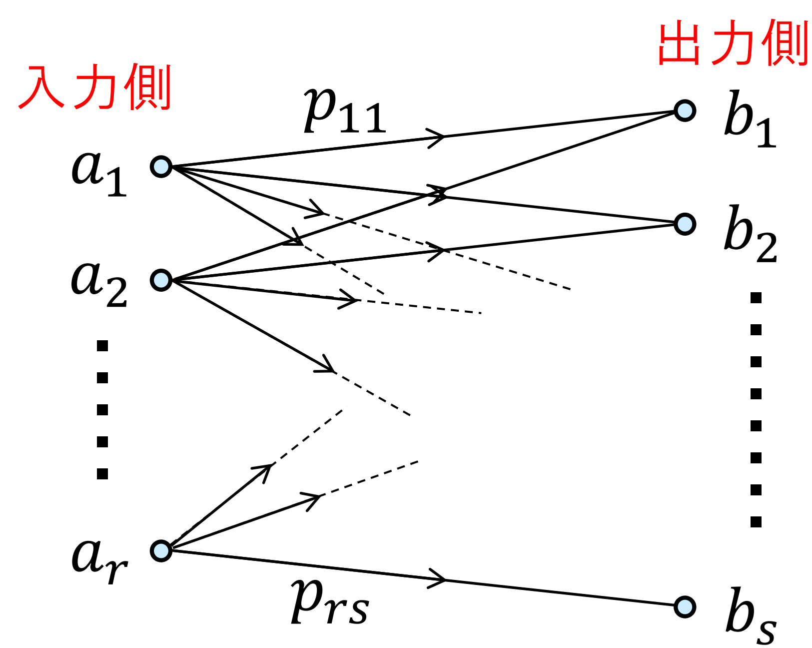
通信路行列と通信路線図

r 元入力アルファベット $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$,
s 元出力アルファベット $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$,
入出力の関係が条件付確率 $p_{ij} = P_{Y|X}(b_j | a_i)$
で与えられる記憶のない定常通信路を考える



$$T = \begin{array}{cc} \text{出力側} & \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix} & \text{入力側} \end{array}$$

p_{ij}を$(i\ , j)$要素とする通信路行列



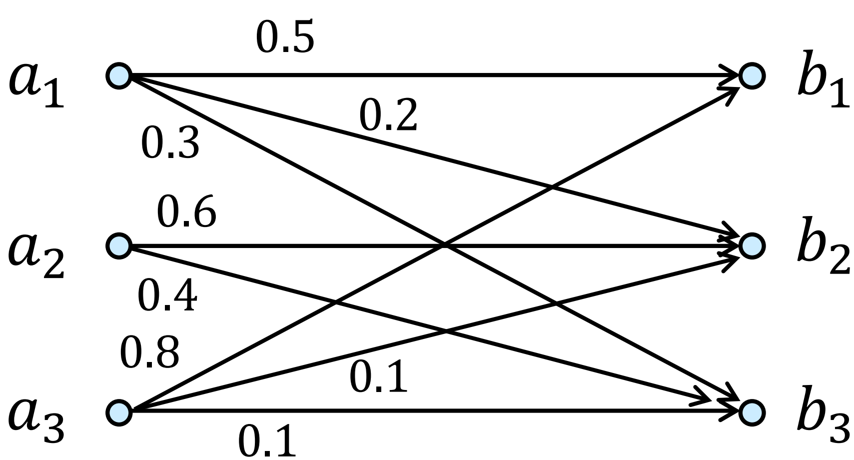
通信路線図

例題6.1

$P(x\mid y)$		y		
		b_1	b_2	b_3
x	a_1	0.5	0.2	0.3
	a_2	0	0.6	0.4
	a_3	0.8	0.1	0.1

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

通信路行列T



通信路線図

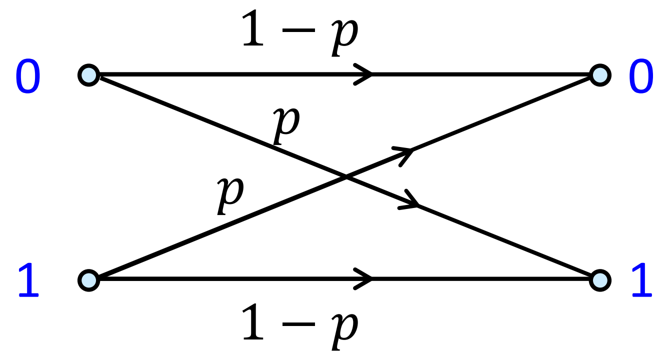
Try 練習問題6.1

一様な通信路

2元対称通信路（binary symmetric channel; BSC）

2重に一様

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ T = & \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$



2元対称消失通信路

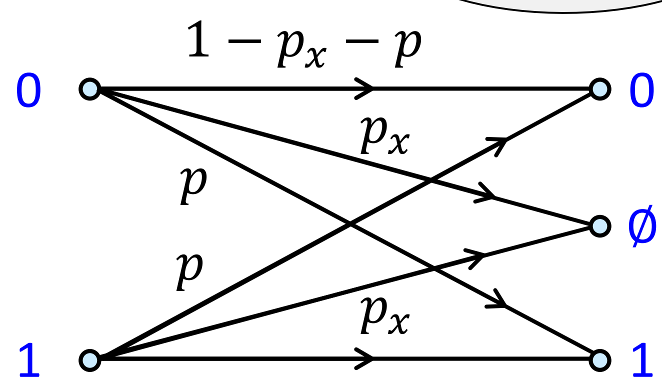
入力アルファベットは $\{0, 1\}$

出力アルファベットは $\{0, 1, \emptyset\}$

（$\emptyset$は消失を表現）

入力に対して一様

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & \emptyset & 1 \end{array} \\ T = & \begin{bmatrix} 1-p_x-p & p_x & p \\ p & p_x & 1-p_x-p \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$



ちょっと休憩

加法的2元通信路

入力と出力のアルファベットが共に {0,1} である2元通信路は，
誤りの有無を用いて表すことができる

t 時点での誤りを確率変数 $E_t \in \{0,1\}$ で表すと，
出力 Y_t は入力 X_t に誤り E_t を加えたものとみなせる

$$Y_t = X_t \oplus E_t,$$

$$E_t = \begin{cases} 0 & \text{誤りなし} \\ 1 & \text{誤り発生} \end{cases}$$

入力 0 → 出力 0
入力 0 → 出力 1　0⊕1=1
入力 1 → 出力 0　1⊕1=0
入力 1 → 出力 1

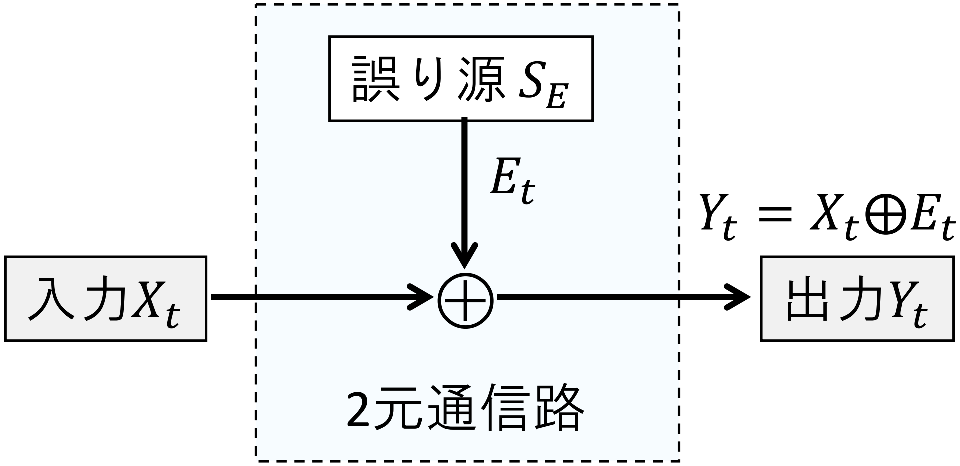


図6.3 加法的2元通信路モデル

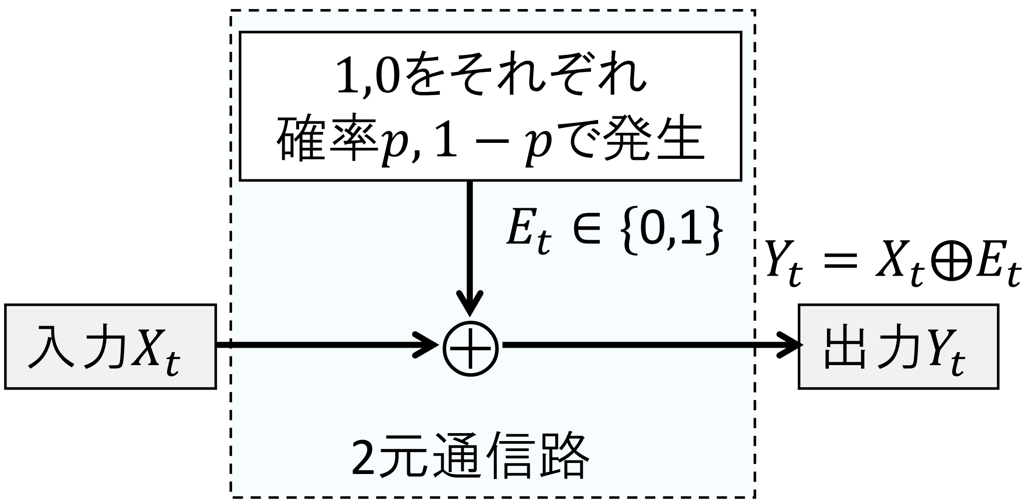
※誤りの発生は入力と統計的に独立であると仮定される

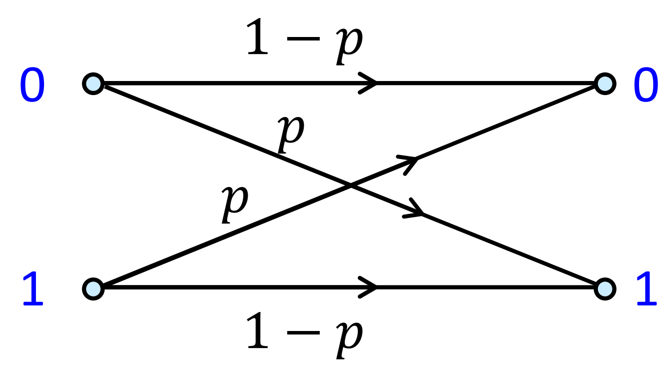
ランダム誤り通信路

加法的2元通信路の誤り源S_Eが，1,0をそれぞれ確率$p, 1-p$で発生させる記憶のない定常2元情報源とする．このとき，0から1への誤りも，1から0への誤りも，他の時点の入出力とは無関係に確率pで発生する．これは2元対称通信路に他ならない

このような誤りをランダム誤り（random error）という

誤りの発生確率 p をビット誤り率（bit error rate）と呼ぶ





2元対称通信路の通信路線図

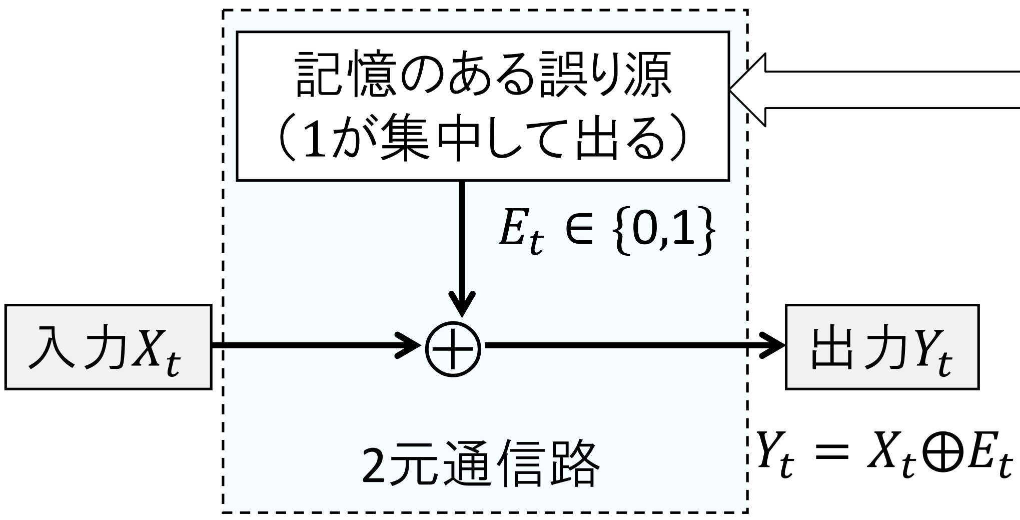
バースト誤り通信路

誤りが一度生じると，その後しばらくの間は連続して誤りが発生すると考えるモデル（誤り源に記憶がある代表的なモデル）

密集して生じる誤りをバースト誤り（burst error）と呼ぶ

例えば，誤り源から発信される系列が次のようになる

0000000111111100000111100000･･･　（ソリッドバーストの例）



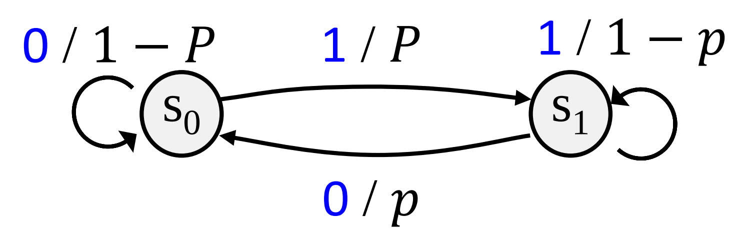


図6.4 単純マルコフ情報源として表される誤り源

Pが大 ⇒バースト発生頻度が増大
pが大 ⇒バーストが短くなる

ソリッドバースト誤りの平均長

誤り系列における 1 の連続(1のラン)を任意に一つ取り出す
その長さがℓ となる確率 $P_L(\ell)$ を求めると,

$$P_L(\ell) = \underline{(1-p)^{\ell-1}}\ \underline{p} \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

となる

最初の1の後に,
1が$\ell - 1$連続する確率

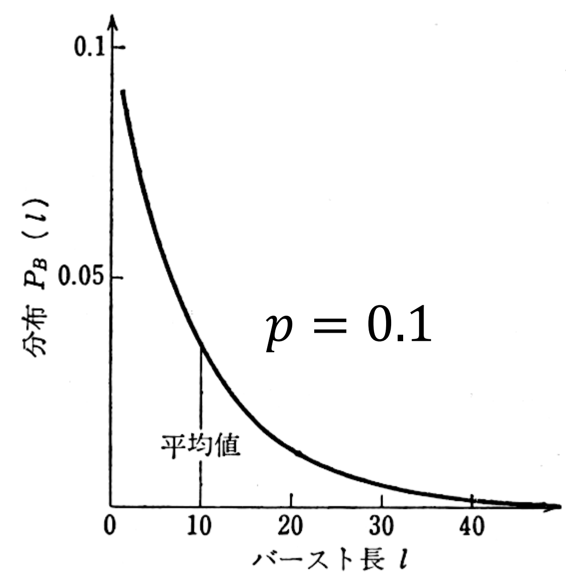
最後に0が出る確率

$\cdots 00\overbrace{111111}^{\ell}00 \cdots$

バースト誤りの長さ(バースト長)の
平均値$\overline{\ell}$ は次のようになる

$$\begin{aligned}\overline{\ell} &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_L(\ell) \\ &= p \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell (1-p)^{\ell-1} \\ &= \frac{1}{p} \ .\end{aligned}$$

手計算で求まります
ノート6.1



バースト長の分布の例

ソリッドバースト誤り源のビット誤り率(例題6.2)

図6.4の誤り源の状態遷移行列Πは

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-P & P \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

である．定常分布を$\boldsymbol{w} = (w_0, w_1)$とすると，$\boldsymbol{w}\Pi = \boldsymbol{w}$および$w_0 + w_1 = 1$から，

$$w_0 = \frac{p}{P+p}, \quad w_1 = \frac{P}{P+p} .$$

よって，誤り源の出力Eが1となる確率$P_E(1)$を求めると

$$P_E(1) = w_0 P + w_1(1-p) = \frac{1}{P+p}\{pP + P(1-p)\}$$

$$= \frac{P}{P+p} .$$

ビット誤り率

Try 練習問題6.2

その他のバースト誤りモデル

ギルバートモデル（Gilbert model）

正誤が混在するバースト誤り

状態Bのときは 1,0 をそれぞれ

$h, 1-h$ の確率で発生させる

バースト長の期待値は $1/p$

ビット誤り率 $\frac{Ph}{P+p}$

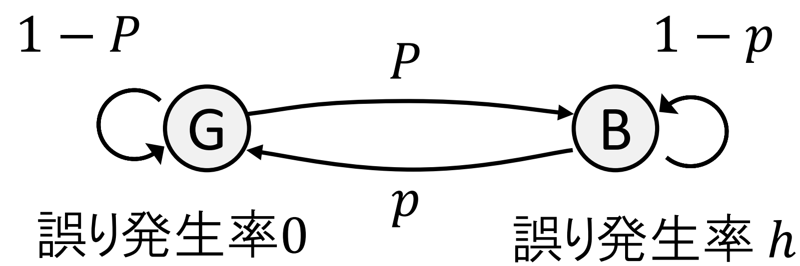
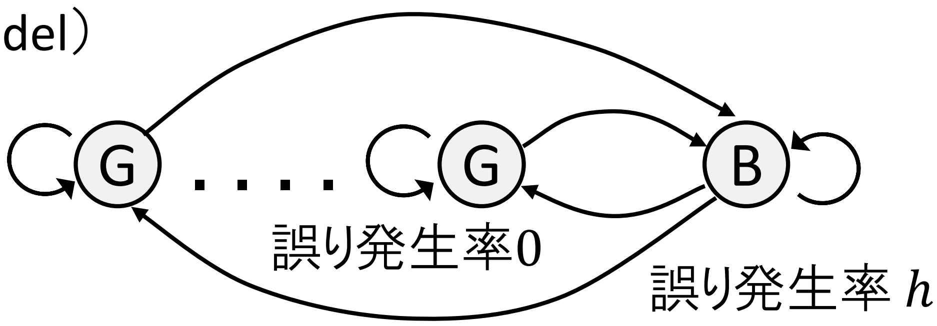


図6.6 ギルバートモデル

フリッチマンモデル（Fritchman model）

ギルバートモデルの

良状態を増やしたもの



フリッチマンモデル

今日のまとめ

6.1 通信路の統計的表現

6.2 記憶のない定常通信路

- 通信路行列と通信路線図
- 2元対称通信路(2重に一様な通信路)
- 2元対称消失通信路(入力に対して一様な通信路)

6.3 加法的2元通信路

- ランダム誤り通信路 = 2元対称通信路
- バースト誤り通信路(ソリッドバースト)
- ギルバートモデル，フリッチマンモデル

次回

- 通信路符号化の限界に関する理論

通信路にまつわる各種エントロピー

入力記号側のエントロピー：

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{r} p(a_i) \log_2 p(a_i)$$

出力記号側のエントロピー：

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{s} q(b_j) \log_2 q(b_j)$$

条件付エントロピー：

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} q(b_j)p(a_i|b_j) \log_2 p(a_i|b_j)$$

結合エントロピー：

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(a_i,b_j) \log_2 p(a_i,b_j)$$

※入力Xの記号a_i $(i = 1, \dots, r)$の生起確率$p(a_i)$，出力Yの記号b_j $(j = 1, \dots, s)$の生起確率$q(b_j)$

（付録）Tunstall-Huffman符号の効率

練習問題5.3の条件のとき，タンストール木の大きさ（使う符号語の数N）を$N = 5$としたときより$N = 6$とするほうが，１記号あたりの平均符号語長が長くなる？

$N = 5$のとき：

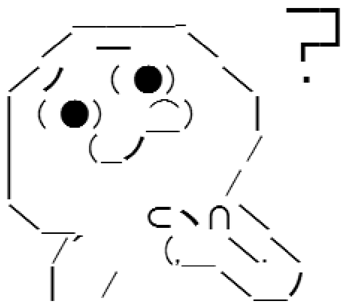
平均ブロック長$\overline{n_5} = 2.36$, ブロックあたりの平均符号長$\overline{\ell'_5} = 2.304$

よって，１記号あたりの平均符号長$\overline{\ell_5} \cong 0.97627$

$N = 6$のとき：

平均ブロック長$\overline{n_6} = 2.60$, ブロックあたりの平均符号長$\overline{\ell'_6} = 2.544$

よって，１記号あたりの平均符号長$\overline{\ell_6} \cong 0.97846$



＜あれぇ？

（付録）Tunstall-Huffman符号の効率

実は，そういうことはありうる！！
何故なら，ハフマン符号が(ブロック毎に)2元符号化しているから（例えば3.4個分の長さの符号語とか作れないから）
Tunstall木を大きくすると平均ブロック長は長くなるが，ハフマン符号化したときに1記号あたりの平均符号長が短くなるとは限らない
2001年に理論的な解析結果が発表されていました！

Serap A. Savari and Wojciech Szpankowski, “On the Analysis of Variable-to-Variable Length Codes”（2002年に同タイトルのショートペーパーが*IEEE International Symposium on Information Theory*で発表されている）

上記論文内の定理2:

$$\limsup_{M\to\infty} \log_2 M \cdot R_{T-H}(M) \le \mathcal{H} \log_2\left(\frac{2\log_2 e}{e}\right)$$

Mは符号語の数
$R_{T-H}(M)$は符号の冗長度

$\mathcal{H}$は情報源のエントロピー
$\log_2((2\log_2 e)/e) \cong 0.086$