講義「情報理論」

第１３回　通信路符号化法（2）

情報理工学専攻 情報知識ネットワーク研究室
喜田拓也

講義資料

2017/7/25

組織符号，線形符号（おさらい）

k個の情報記号に対して検査記号を求め，それを末尾に追加することで信頼性を高める符号長nの等長符号を組織符号という

$$w = x_1 x_2 \cdots x_k \, c_1 c_2 \cdots c_{n-k}$$

符号長n，情報記号数kの組織符号を(n, k)符号と書く．
(n, k) 符号の効率ηは，$\eta = k/n$

検査記号が情報記号の線形の式で与えられる符号を線形符号と呼ぶ．線形符号では，任意の二つの符号語について，成分ごとの和をとったものも符号語になっている．これは線形符号となるための必要十分条件である

単一パリティ検査符号は，一つの誤りを検出できる誤り検出符号

水平垂直パリティ検査符号は，1個の誤りが訂正でき，2個の誤りを検出することができる誤り検出訂正符号

(7,4)ハミング符号（おさらい）

情報ビット x_1, x_2, x_3, x_4 に対し，検査ビットを

$$c_1 = x_1 + x_3 + x_4$$
$$c_2 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$c_3 = x_2 + x_3 + x_4$$

と計算し，$\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$という符号語に組織符号化する符号を(7,4)ハミング符号という

このとき，受信語 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_7)$ に対するシンドローム $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ は

$$s_1 = y_1 + y_3 + y_4 + y_5$$
$$s_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_6$$
$$s_3 = y_2 + y_3 + y_4 + y_7$$

であり，これを計算することで誤りを検出･訂正することができる

(7,4)ハミング符号

x_1	x_2	x_3	x_4	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

今日の内容

8.2.2 生成行列と検査行列

8.2.3 一般のハミング符号

8.2.5 ハミング距離と誤り訂正能力

線形符号の生成行列

線形符号の場合，符号化と復号の計算を行列の式で記述できる

たとえば，(7,4)ハミング符号の符号語$\boldsymbol{w}$は，

$$\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3, x_2+x_3+x_4)$$

と書くことができる．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$とし，

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_3 \\ \leftarrow x_4 \end{matrix}$$

という行列$\mathbf{G}$を考えると，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}\,\mathbf{G}$として符号化できる

このように，k個の情報記号からなるベクトル$\boldsymbol{x}$に掛けたとき，それに対応する符号語が生成されるような行列$\mathbf{G}$を生成行列という

(n, k)線形符号の生成行列は $k \times n$ 行列となる

Try 問8.4

検査行列とシンドローム

(7,4)ハミング符号のパリティ検査方程式の係数を並べた行列を

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

←--- 1つ目
←--- 2つ目
←--- 3つ目

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{matrix}$$

とおく. これを用いるとパリティ検査方程式は

$$\boldsymbol{w}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$$

と書ける. $\mathbf{H}^T$は$\mathbf{H}$の転地行列, $\mathbf{0}$は全成分が0のベクトルを表す.

この行列$\mathbf{H}$をパリティ検査行列, または単に検査行列と呼ぶ

(n, k)線形符号のパリティ検査方程式の数は, 検査記号数$n - k$に等しいので, 検査行列は $(n - k) \times n$ 行列となる

検査行列$\mathbf{H}$を用いると, シンドロームの計算は受信語$\boldsymbol{y}$に対して,

$$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3) = \boldsymbol{y}\mathbf{H}^T.$$

よって, シンドロームは誤りパターンを$\boldsymbol{e}$とすると次が成り立つ.

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{e})\mathbf{H}^T = \boldsymbol{w}\mathbf{H}^T + \boldsymbol{e}\mathbf{H}^T = \boldsymbol{e}\mathbf{H}^T.$$

Try 問8.5

検査行列$\mathbf{H}^T$の構成

(7,4)ハミング符号では，3ビットのシンドローム（$2^3 = 8$通りある）で受信語に含まれる単一の誤りを見分けられた

全ゼロ（000）のパターンは誤りがないことを表すので，残り7つのパターンを使って，ちょうど7ビットの符号語の誤りを識別している

単一誤りに対するシンドローム

誤りパターン							シンドローム		
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	s_1	s_2	s_3
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

この部分は行を並べ替えたものも使える

検査行列 $\mathbf{H}^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

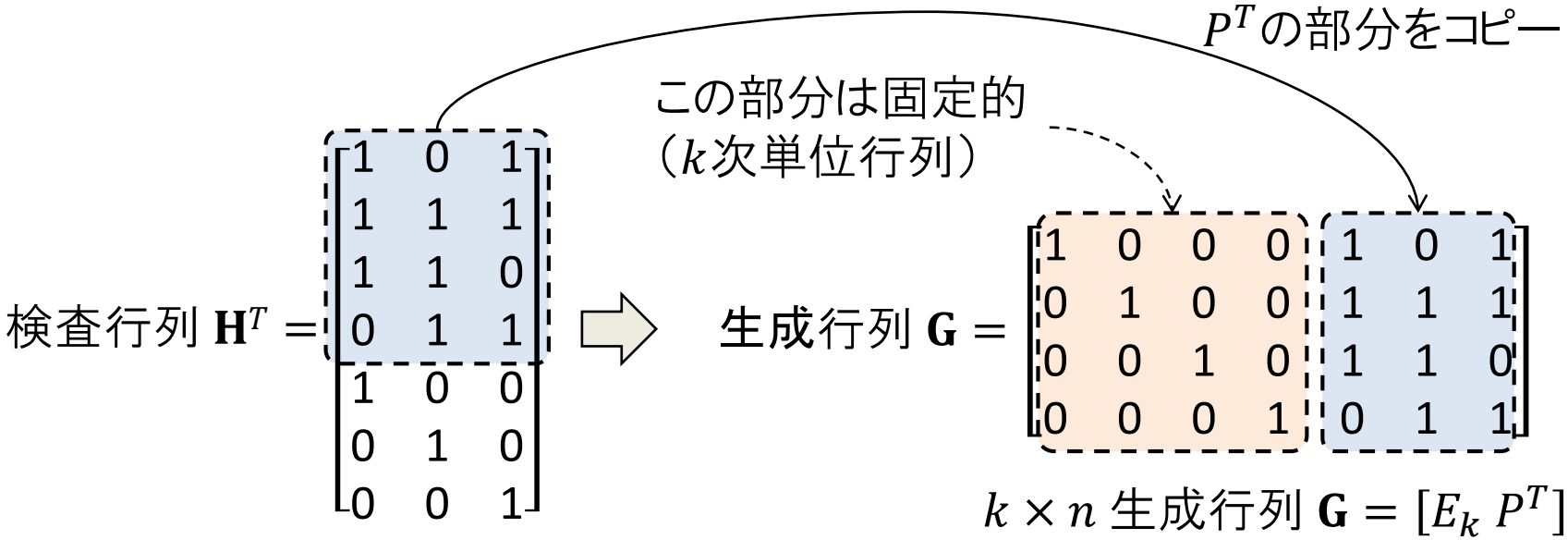
$2^m - m - 1 = 2^3 - 3 - 1 = 4.$

この部分は固定的（m次単位行列）

生成行列Gの構成

検査行列$\mathbf{H}^T$から，対応する生成行列$\mathbf{G}$を機械的に構成できる

1. $\mathbf{G}$の左の部分は常に$k \times k$単位行列
2. $\mathbf{G}$の右の部分に検査行列の転置$\mathbf{H}^T$の上部k行を配置する



$m \times n$ 検査行列$\mathbf{H} = [P \; E_m]$

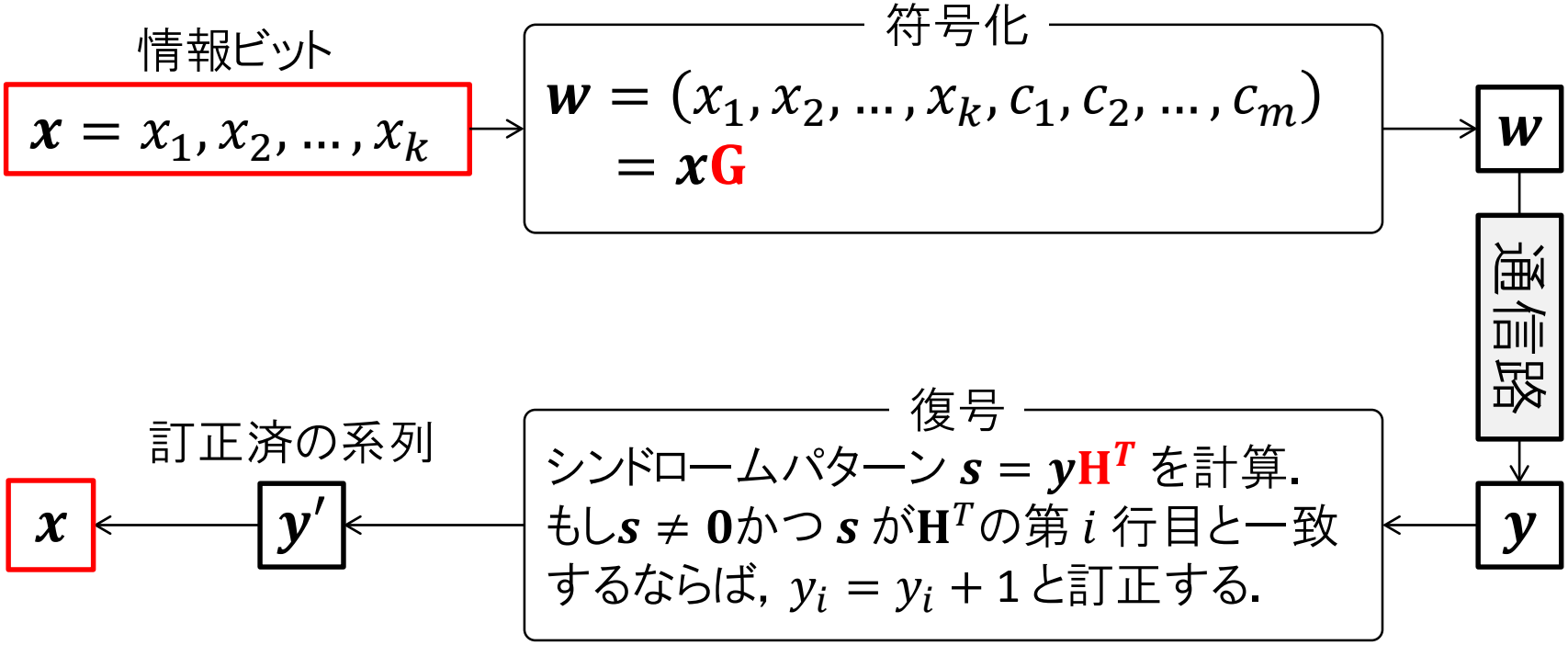
P: $m \times k$ 行列，E_m: $m \times m$ 単位行列

Try 問8.6～8.9

一般のハミング符号

任意の$m \geq 2$について，符号語長が$n = 2^m - 1$，情報ビットが$k = 2^m - m - 1$となるハミング符号を構成することができる

（与えられたmに対して，$m \times n$の検査行列$\mathbf{H} = [P\ E_m]$および$k \times n$の生成行列$\mathbf{G} = [E_k\ P^T]$を構成して，下図のように符号化・復号すればよい）



※ ハードウェア化すれば，各ビットを並列に処理することが可能（8.2.4節）

ちょっと休憩

ハミング距離

2つのn次元ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に対して，ハミング距離$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$を次のように定義する.

$$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \delta(u_i, v_i)\,. \quad \text{ただし，} \delta(u, v) = \begin{cases} 0 & (u = v), \\ 1 & (u \neq v). \end{cases}$$

すなわち，$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$は，$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$の互いに異なる成分の数である

ハミング距離は距離の3公理を満たす

距離の3公理

任意の n 次元ベクトル v_1, v_2, v_3 に対して以下のことが成り立つ.

i. $d_{\mathrm{H}}(v_1, v_2) \geq 0$ であり，等号が成立するのは $v_1 = v_2$ のときに限る
ii. $d_{\mathrm{H}}(v_1, v_2) = d_{\mathrm{H}}(v_2, v_1)$
iii. $d_{\mathrm{H}}(v_1, v_2) + d_{\mathrm{H}}(v_2, v_3) \geq d_{\mathrm{H}}(v_1, v_3)$ （三角不等式）

ハミング重み

n次元ベクトル$\boldsymbol{v}$に対し，ハミング重み$w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{v})$を次のように定義する.

$$w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{v}) \triangleq d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \quad （\boldsymbol{0}\text{ はすべての成分が0のベクトル）}$$

すなわち，$w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{v})$ はvの0でない成分の数である
たとえば，$\boldsymbol{v} = (1, 1, 0, 0)$ に対して，$w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{v}) = 2$ となる

ハミング距離はハミング重みを用いて次のように表せる.

$$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}).$$

たとえば，$\boldsymbol{u} = (1, 1, 0, 0), \boldsymbol{v} = (0, 1, 1, 0)$ に対して，

$$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = w_{\mathrm{H}}\big((1,0,1,0)\big) = 2\,.$$

符号語$\boldsymbol{w}$を送りt個の誤りが生じて$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$が受信されたとする.
このとき，次が成り立つ.

$$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{e}) = t\,.$$

符号の最小距離と最小ハミング重み

定義8.12

与えられた2元符号Cに関して，任意の2つの異なる符号語の間のハミング距離の最小値，すなわち，

$$d_{\min} \triangleq \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in C,\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}} d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

計算が面倒

を，符号Cの最小ハミング距離（または単に最小距離）と呼ぶ

定義8.13

与えられた2元符号Cに関して，全ゼロを除くすべての符号語のハミング重みの最小値

$$w_{\min} \triangleq \min_{\boldsymbol{w}\in \mathrm{C}} w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w})$$

計算が楽！

を，符号Cの最小ハミング重みと呼ぶ

線形符号の最小ハミング距離

定理8.5

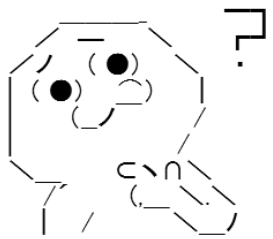
線形符号では，最小ハミング重みと最小距離が一致する

証明：定義より.

$$
\begin{aligned}
d_{\min} &= \min_{\substack{\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v};\\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in C}} d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\
&= \min_{\substack{\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v};\\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in C}} w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \\
&= \min_{\boldsymbol{w}\in C} w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}) \\
&= w_{\min}
\end{aligned}
$$

$d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = w_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ だから

線形符号だから，符号語どうしの和（差）も符号語になる



いったい何の意味があるの・・・？

最小距離と誤り訂正能力の関係

限界距離復号法：

t_1は選べる

$d_{\min} \geq 2t_1 + 1$ を満たす整数t_1を定め，t_1以下の誤り訂正を行う

t_1の最大値$t_0 = \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$ を符号Cの誤り訂正能力という

$t_2 = d_{\min} - 2t_1 - 1$ とおくと，$t_1 + 1 \leq t \leq t_1 + t_2$個の誤りについて，訂正はできないが検出は可能

t_1 を大きくする

　正しく復号される確率は増大

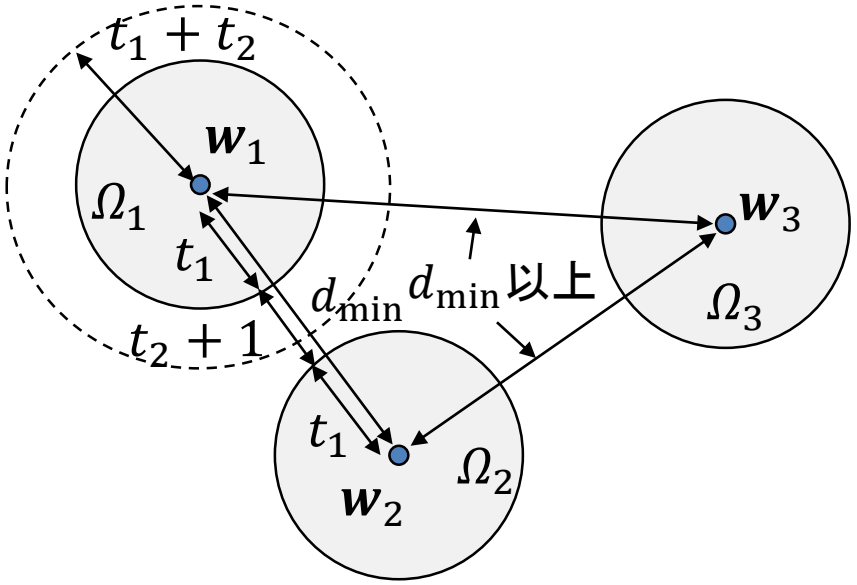
　誤って復号される確率も増大

t_1 を小さくする

　正しく復号される確率は減少する

　検出可能な誤りの個数が増える

　（検出できれば，再送要求などの救済措置ができる）



誤り訂正能力の例

【例】 $d_{\min} = 5$ の符号による誤りの訂正と検出

t_1	訂正可能な誤り	訂正できないが検出可能な誤り
0	—	1～4個
1	1個	2～3個
2	2個	—

ハミング符号

符号語長に関係なくすべて，最小距離$d_{\min} = 3$（定理8.6）

誤り訂正能力$t_0 = 1$

（(7,4)ハミング符号の場合，最小距離$d_{\min}$＝最小ハミング重み＝3 ）

水平垂直パリティ検査符号

最小距離$d_{\min} = 4$，誤り訂正能力 $t_0 = 1$

単一誤り訂正･2重誤り検出符号

限界距離復号法と最尤復号法の違い

ビット誤り率 $p < 0.5$ の2元対称通信路(BSC)を考える

間違いの数

符号語$\boldsymbol{w}$を送って，$\boldsymbol{y}$が受信される確率は，$t = d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$とすると，

$$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}) = p^t(1-p)^{n-t}.$$

$p < 0.5$では，tについて単調減少

<u>最尤復号法の場合</u>

$\boldsymbol{y}$が受信されたとき，$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w})$が最大となる符号語$\boldsymbol{w}$に復号

$p < 0.5$のBSCでは，$t = d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ が最小となる $\boldsymbol{w}$ に復号

$\boldsymbol{y}$とハミング距離が一番近い符号語$\boldsymbol{w}$が送られたと常に推定

<u>限界距離復号法の場合</u>

$\boldsymbol{y}$が受信されたとき，ハミング距離$t = d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$が$t_1$以下の最も近い符号語 $\boldsymbol{w}$ に復号

どの$\boldsymbol{w}$ についても $d_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) > t_1$ となった場合は推定を放棄

正しく復号される確率 P_c	○	最尤復号法 ＞ 限界距離復号法
誤って復号される確率 P_e		最尤復号法 ＞ 限界距離復号法 ○
実現の容易さ		最尤復号法 ＜ 限界距離復号法 ○

今日のまとめ

8.2.2 生成行列と検査行列
8.2.3 一般のハミング符号
8.2.5 ハミング距離と誤り訂正能力

次回
　巡回符号