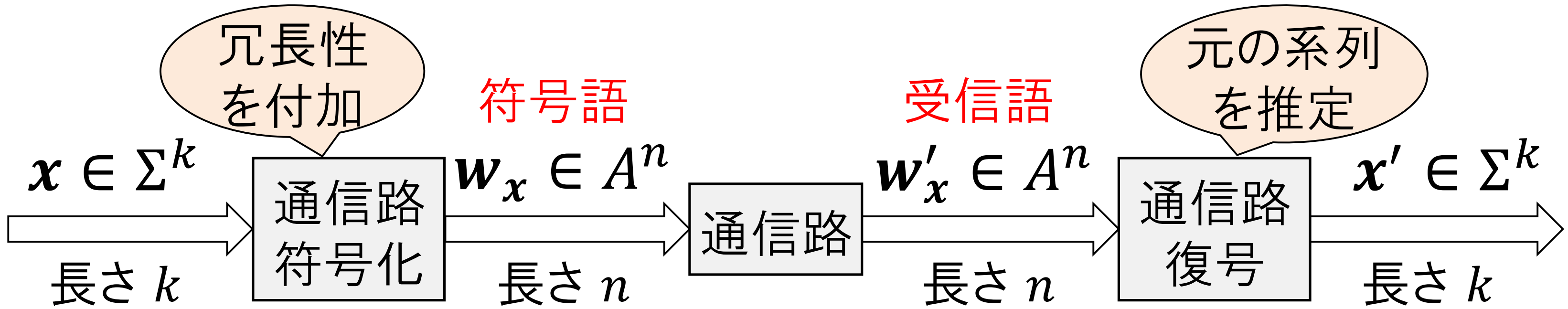
講義「情報理論」

第11回　通信路符号化の限界 (2)

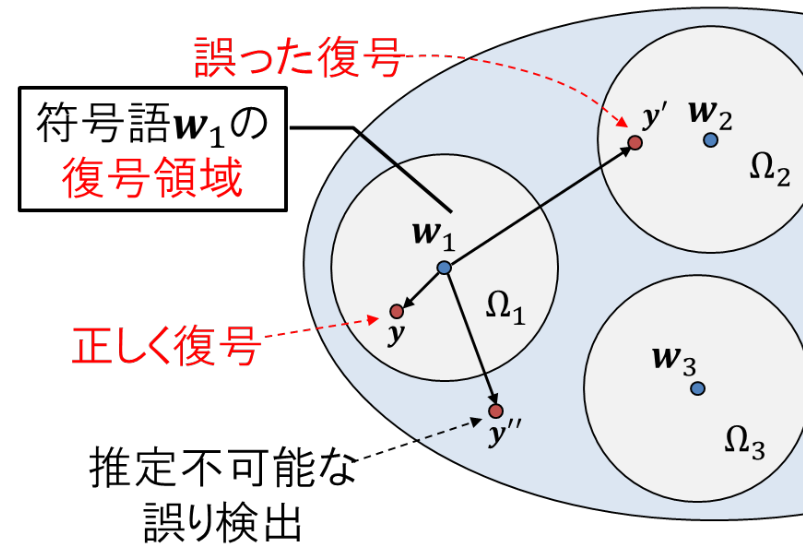
情報理工学専攻 情報知識ネットワーク研究室
喜田拓也

通信路符号化の考え方（おさらい）



通信路符号化は，入力されるq元記号列を長さ k 毎に区切り，各ブロックに長さ n の等長なr元記号列を割り当てることで行う

符号語どうしが受信空間(A^n)内で十分に離れていれば，受信語に少しの誤りが含まれていても，それに近い符号語へと推定できる



通信路容量（おさらい）

記憶のない定常通信路の通信路容量（定理7.1より）

$$C = \max_{P_X \in \mathbf{P}} \{ I(X;Y) \}$$

（単位は，ビットあるいはビット/通信路記号）

2元対称通信路の通信路容量：　$C = 1 - \mathcal{H}(p)$

pは
ビット誤り率

通信路に記憶がある場合の通信路容量

拡大情報源を考える．すなわち，長さ n の入力系列をX_n，
出力系列をY_nとし，P_{X_n} をX_nの確率分布とすれば，

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[\max_{P_{X_n} \in \mathbf{P}^n} \left\{ \frac{1}{n} I(X_n; Y_n) \right\} \right].$$

誤り源のエントロピー
$H(E)$（ビット/記号）

加法的2元通信路の通信路容量：　$C = 1 - H(E)$

今日の内容

7.3 通信路符号化定理

7.4 通信システム全体としての情報伝達の限界

通信路容量と情報速度の関係

情報速度R で符号化

送信側
$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$
$p_i=P_X(a_i)$

X

通信路
（通信路容量C）

$p_{ij}=P\left(b_j|a_i\right)$

Y

受信側
$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_s\}$
$q_j=P_Y\left(b_j\right)$

通信路を使って伝送できる，1記号あたりの情報量の最大値は，その通信路の通信路容量C（ビット/記号）

ある通信路符号化により，通信路に入力される符号語の1記号あたりの平均情報量は，その符号の情報速度R（ビット/記号）

情報速度R ＜ 通信路容量C　ならよさそうだ！

R を C と比べて，どのくらい低くすれば良いだろうか？
それで，どのくらい信頼性を向上できるのか？

通信路符号化定理(定理7.4)

定理7.4[通信路符号化定理]

通信路容量Cである通信路に対し，$R < C$ であれば，情報速度Rの符号で復号誤り率がいくらでも小さいものが存在する．しかし，$R > C$ であれば，そのような符号は存在しない．

※ Shannonの第2符号化定理とも呼ばれる

通信路容量を超えない情報速度でなら，
いくらでも精度よく通信できる
ような符号法がある！！

※でも具体的な符号の構成方法は分かっていない・・・

通信路符号化定理の意味するところ

ビット誤り率が0.1である2元対称通信路があるとする.

この通信路の通信路容量Cは

$$C = 1 - \mathcal{H}(0.1) \approx 0.531 \text{（ビット/記号）}.$$

2元記号列を長さkのブロックに区切って，長さnの2元符号化する.
この符号の情報速度Rは$R = k/n$となるが，定理より,

$$k/n < 0.531$$

となるような(n, k)に対し，ほとんど誤りなく情報を伝達できる符号が存在する.

つまり，元の系列の$n/k = 1/0.531 \approx 1.88$倍の長さになるように冗長性を付加すれば，10ビットに平均して1回起こるビット誤りを，ほとんどすべて訂正することができるような符号が存在する.

※ 実際の通信路のビット誤り率はもっと小さいので，必要な冗長性はごく小さい

通信路符号化定理の証明（前半の概要）

定理は，符号の存在だけ保証している.

Shannonはこれをランダム符号化(random coding)を用いて証明.

ランダム符号化とは，受信空間から独立な無作為復元抽出をM回繰り返すことによりM個の符号語を選ぶ符号化法である.

証明は，ランダム符号化によって作られる符号Cの復号誤り率$P_e(\mathrm{C})$の期待値$E_{\mathrm{C}}\left(P_e(\mathrm{C})\right)$を求め，情報速度$R$と通信路容量$C$に対して，$R < C$のとき符号長$n$を$n \to \infty$とすれば，$E_{\mathrm{C}}\left(P_e(\mathrm{C})\right) \to 0$となることを示すことによる.

これが示されれば，復号誤り率が期待値以下となるような符号は必ず一つは存在する. この事実から定理の前半は証明される.

※ 詳しくは教科書7.6節を参照

通信路符号化定理の証明（後半）

情報速度が$R > C$ の符号で，復号誤り率P_eをいくらでも小さくできるものが存在すると仮定する.

すると，実際に，Rにいくらでも近い速度で情報を伝達することができる.

すなわち，通信路容量Cを超えた情報速度で情報を送ることができることになる.

通信路容量の定義からこれは不可能である.

よって，そのような符号は存在しない.【証明終】

符号長nが有限のときのP_eの収束の速さ

符号長nを無限大にすると，いくらでも復号誤り率を小さくできる．
nが有限のとき，復号誤り率P_eはどのように0に近づくだろうか？

定理7.5

記憶のない通信路に対し，ランダム符号化による符号長n，情報速度Rの符号Cの復号誤り率P_eの期待値$E_{\mathrm{C}}(P_e(\mathrm{C}))$は，

$$E_{\mathrm{C}}(P_e(\mathrm{C})) \leq 2^{-nE_r(R)}$$

を満たす．ただし，$E_r(R)$ は次式で定義される．

ランダム符号化指数

$$E_r(R) = \max_{P_X, 0 \leq \rho \leq 1} [E_0(\rho, \mathrm{p}) - \rho R]$$

ρ は冗長度

ここに，P_Xは入力アルファベット上の分布であり，

$$E_0(\rho, p) = -\log_2 \sum_{y \in B} \left[\sum_{x \in A} P_X(x) P_{(Y|X)}(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho}$$

である．

Gallager関数

符号長n，情報速度Rの最適な符号法は？

系7.1

記憶のない通信路において，復号誤り率 P_eが，

$$P_e \leq 2^{-nE_r(R)}$$

を満たす長さn，情報速度 R の符号が存在する．

では，最も良い符号の収束速度はいくらなのか？

$P_e^*(n,R)$を長さn，情報速度 R の符号の中での復号誤り率の最小値とする．それを達成する符号の収束速度 $E(R)$ は，

$$E(R) = \lim_{n\to\infty} -\log_2 P_e^*(n,R)/n$$

で与えられる．これは信頼度関数（reliability function）と呼ばれる．

しかし，そのような符号の実際的な構成方法は知られていない．

LDPC（低密度パリティ符号）: Robert G. Gallager (1963年)

ターボ符号: C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima (1993年)

限界に迫る符号化！

信頼度関数を計算するのは，一般には難しい．

2元対称通信路に対する信頼度関数

p をビット誤り率とするとき，

$$p_1^* = \sqrt{p}/\left(\sqrt{p} + \sqrt{1-p}\right)$$

となる p_1^* を求め，$R_0 = 1 - \mathcal{H}(p_1^*)$と
おけば，$0 \leq R \leq R_0$ となる情報速度R
に対しては

$$E(R) = 1 - R - 2\log_2\left(\sqrt{p} + \sqrt{1-p}\right).$$

また，$R_0 \leq R \leq C = 1 - \mathcal{H}(p)$ となるR に
対しては，まず，

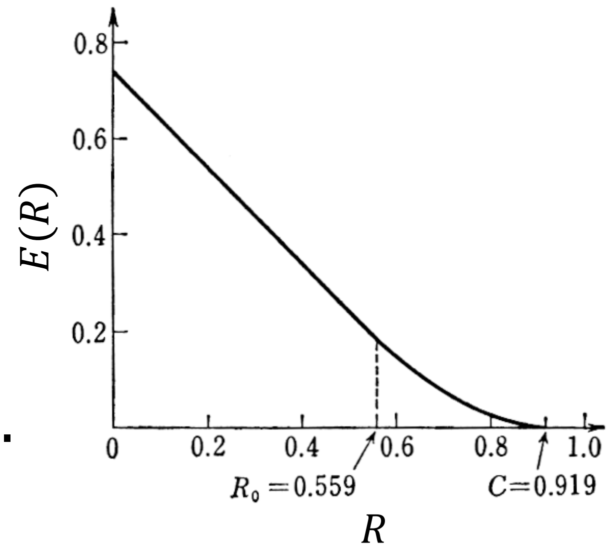
$$R = 1 - \mathcal{H}(p^*)$$

p^*は
Rの関数

を満たす p^* $(p < p^* < p_1^*)$ を求め，

$$E(R) = p^* \log_2 \frac{p^*}{p} + (1-p^*)\log_2 \frac{1-p^*}{1-p}$$

とすればよい．右図に，$p = 0.01$ のときの $E(R)$ を示す．

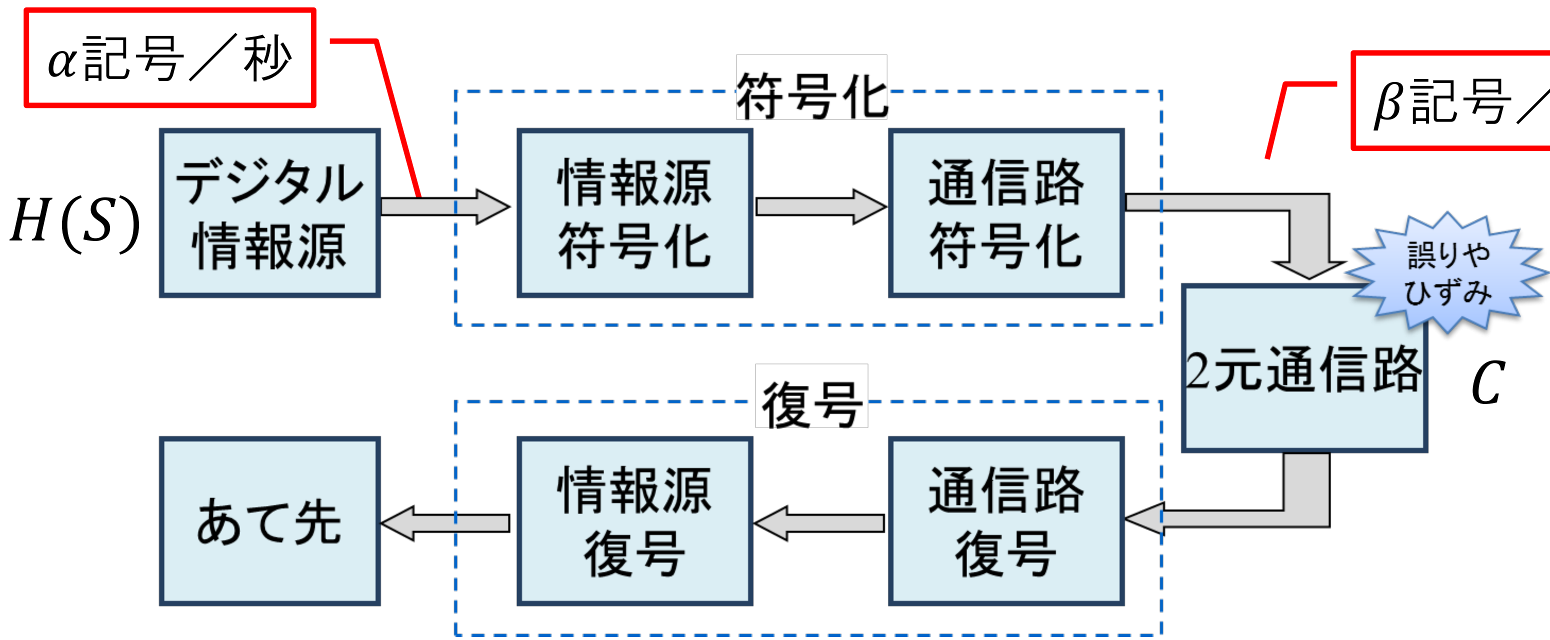


2元対称通信路の
信頼度関数

ちょっと休憩

もう一度，通信システムのモデル

与えられた情報源と通信路に対しどれだけ良い通信ができるか？



エントロピー$H(S)$（ビット／情報源記号）の情報源S，
通信路容量C（ビット／通信路記号）の通信路を考える

情報源から情報源記号が毎秒α個発生し，通信路では毎秒β個の通信路記号が伝送されているとする．

この通信システムで伝送できる限界は？

このとき，情報源から発生する秒あたりの情報量は，

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \alpha H(S) \quad \text{（ビット／秒）}.$$

一方，秒あたり通信路容量は

$$\mathbf{C} = \beta C \text{（ビット／秒）}.$$

したがって，

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} < \mathbf{C}$$

ならば任意に小さい誤り率で通信することができる. しかし，

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} > \mathbf{C}$$

の場合は，ひずみが生じてしまう.

$\mathcal{R} > \mathbf{C}$の場合どのくらいひずむのか？

情報源Sの速度･ひずみ関数を$R(D)$（ビット／情報源記号）とすると，平均ひずみがD以下という条件の下で，秒あたりの情報量を

$$\mathcal{R}(D) = \alpha R(D)$$

まで落とすことができる.

このとき，$\mathcal{R}(D_*) = \mathbf{C}$ を満たすD_*を考える．すると，D_*よりもεだけ多くの平均ひずみを許せば，情報速度

$$\mathcal{R}(D_* + \varepsilon) < \mathcal{R}(D_*) = \mathbf{C}$$

の符号化を作ることができる.

すなわち，情報源Sからの情報を，D_*に任意に近い平均ひずみで送ることができる.

通信システム全体としての情報伝達の限界

定理7.6

情報速度$\boldsymbol{\mathcal{R}}$(ビット／秒)で発生する情報を通信路容量$\mathbf{C}$(ビット／秒)の通信路を介して送るとき,

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} < \mathbf{C}$$

であれば，任意に小さい誤り率で情報を伝送できる．また,

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} > \mathbf{C}$$

であれば，情報源の速度･ひずみ関数が

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(D_*) = \mathbf{C} \text{（ビット／秒）}$$

を満たすD_*に対し，D_*に任意に近いひずみで情報を伝送できるが，D_*より小さい平均ひずみでは伝送できない．

例題7.3

1, 0 を 0.2, 0.8 の確率で発生する記憶のない情報源の出力系列を，ビット誤り率が0.1の2元対称通信路を通して送る．情報源は1秒に1記号を発生し，通信路も1秒に1記号を伝送する．このとき，

$$\mathcal{R} = \mathcal{H}(0.2) \approx 0.7219 \qquad \text{（ビット／秒），}$$

$$\mathbf{C} = 1 - \mathcal{H}(0.1) \approx 0.5310 \quad \text{（ビット／秒）．}$$

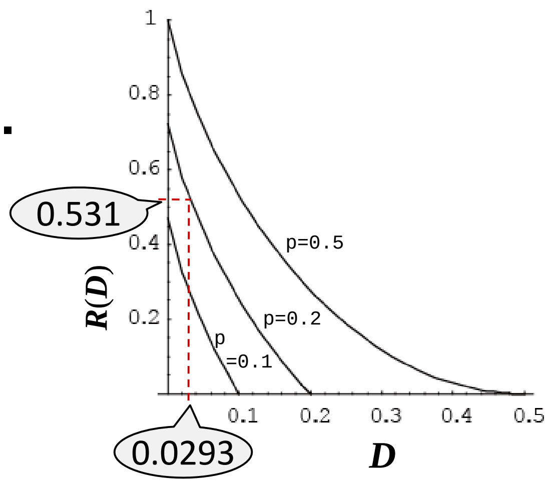
すなわち，
$\alpha = \beta = 1$

$\mathcal{R} > \mathbf{C}$ なので，ひずみなしには通報を送れない．

ひずみ測度として$d(x,y) = \begin{cases} 0\,; x = y \\ 1\,; x \neq y \end{cases}$を用いる．

このとき，速度･ひずみ関数は右図の$p = 0.2$の場合となる．これより$D_* = 0.0293$が求まる．

$$\because \alpha R(D_*) = \mathbf{C} \Longrightarrow R(D_*) = 0.5310$$
$$\Longrightarrow \mathcal{H}(0.2) - \mathcal{H}(D_*) = 0.5310$$
$$\Longrightarrow \mathcal{H}(D_*) = 0.7219 - 0.5310 = 0.1909$$
$$\Longrightarrow D_* = \mathcal{H}^{-1}(0.1909) = 0.0293\,.$$



速度･ひずみ関数$R(D)$

Try 練習問題7.3

今日のまとめ

通信路符号化定理

- 通信路符号化定理（Shannonの第2符号化定理）
  - ランダム符号化法による証明
- 符号語長が有限の場合の限界
  - 信頼性関数

通信の限界

- 通信の理論的限界

次回

- （具体的な）通信路符号化法について

講義（中間）アンケートまとめ１

むずかしい．単語がわからない．	頑張って！
配布ノートの返却があったが間違っているところに☑はついていたが，何が正しいのかわからないから違っているのであって，うっかりミスではない．⇒配布ノートの答えがほしい．	私のウェブサイトの講義ページで配布しています．初回に配布した授業詳細のハンドアウトにURLが載っています．
授業が面白く，分かりやすいです．	ありがとうございます．
情報エレクトロニクス演習の〇×問題の解説を配布していただけるとありがたいです．	他のクラスの先生と協議してみます．
宿題は量と質の両方の面で適度なので，理解がしやすく勉強が楽しい．	ありがとうございます．
情エレ演習のときに配布ノートが手元にあるように回収・配布してほしい．	申し訳ない！そうしたかったのですが，今回は間に合いませんでした！
配布ノートの解答ほしいです．	私のウェブサイトの（同上）
エントロピーとはどのようなニュアンスで使われているのでしょうか．情報量の期待値の名称というだけでしょうか．	定義からはその通りです．ある事象に内在する複雑さの量と考えても良いでしょう．「より複雑な事象を正確に記述するには，より長い言葉が必要になる」というのが情報源符号化定理の別の見方ですね．

講義（中間）アンケートまとめ 2

演習の解答・解説を紙媒体にしていただきたい.	検討します.
わかりやすいです.	ありがとうございます.
各回ごとに配布ノートで問題演習できたので，記憶が定着しやすくて良かったです.	良かったです.
補講をもっと早くに教えてほしかったです.（４月ごろに）	4月の段階で周知するのは難しいです. が，方法を検討してみます.
これまで集めていない配布ノートの答えをいただくことは可能でしょうか. 可能でしたらいただきたいです.	私のウェブ（同上）
とても難しい授業内容だと思っていたが，思っていたよりは楽だったので良かった.	良かった.
講義はとても興味深いです. 理解して覚える量が多く難しいですが，講義は分かりやすいです.	良かったです.
ファイルをzip化しないでください. アップルでデフォでは見えないです.	じゃあlzhかrarなら大丈夫でしょうか・・・. ちょっと検討します.
正とを指名して問題を解かせるときは，もう少し時間をとってほしい. スライドがよくできていて分かりやすかった.	なるほど. 次回はもう少し配慮したいと思います.

講義（中間）アンケートまとめ 3

時々出てくるネタがすきです．	それは良かった．
言っていることは理解できるが，具体的なイメージをするのが難しい．	もっと工夫したいと思います．
計算の仕方がわかってから面白くなってきたのだが，エントロピーとはなんなのか，いまいち理解できない．	上の回答を参照してください．
プリントに分かりやすくまとめられているので，理解しやすい．	良かったです．
授業中にたまに出てくる小ネタがおもしろかったです．	ありがとうございます．
アニメなどのネタをたまにはさんでいて授業がおもしろいと思う．	もっと笑ってもらっても構わないのですよ．
プリントがあって分かりやすい．欠席者のためにスライドやプリントの答えがほしいです．	なるほど．配慮します．
小ネタ楽しいです．定理2.1ではmax(H(X))=log_2Mがシャノンの補助定理から証明可能な印象を受けます．これが自明ではなく，ラグランジュの未定乗数法などから証明できることを明示したほうがよい気がします．	提案ありがとうございます．次回に活かしたいと思います．
演習の模範解答がほしいです．	私の（同上）