講義「情報理論」

第6回　情報源符号化とその限界

情報理工学部門 情報知識ネットワーク研究室
喜田拓也

講義資料

2019/6/20

正規マルコフ情報源の定常分布(おさらい)

十分時間が経過すれば，初期分布がどうであれ，状態分布は定常的な確率分布(定常分布)に落ち着く.

正規マルコフ情報源が落ち着く定常分布を

$$\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \cdots, w_{N-1})$$

とする. w_iは確率なので，当然ながら

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_{N-1} = 1 .$$

大事な式！

ある時点の状態分布が定常的で $\boldsymbol{w}$ であるとすれば，次の時点の状態分布も $\boldsymbol{w}$ でなければならないので，$\boldsymbol{w}$ は

$$\boldsymbol{w}\Pi = \boldsymbol{w}$$

大事な式！

を満たさなければならない.

正規マルコフ情報源の遷移確率行列 Π に対しては，この式を満たす $\boldsymbol{w}$ が唯一存在し，極限分布と一致する.

情報源のエントロピー（おさらい）

情報源Sの1次エントロピー：

$$H_1(S) = -\sum_{k=1}^{M} p_k \log_2 p_k \ .$$

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$
a_kの生起確率p_k

情報源Sのn次エントロピー：

$$H_n(S) = \frac{H_1(S^n)}{n} \ .$$

S^nは情報源Sの
n次拡大情報源

情報源Sのエントロピー：

$$H(S) = \lim_{n\to\infty} H_n(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_1(S^n)}{n} \ .$$

今日の内容

4.1 情報源符号化の基本

4.2 効率よい符号の条件

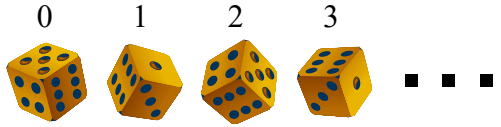
4.3 符号の木

4.4 クラフトの不等式

4.5 平均符号長の限界

情報源符号化の基本

記憶のない定常情報源S:



情報源S

x	$P(x)$
A	0.5
B	0.25
C	0.2
D	0.05

情報源系列

A B A A B C A C・・・

x	C1
A	00
B	01
C	10
D	11

符号(code)

符号語

符号アルファベット
$\Gamma = \{0,1\}$

(2元)
符号化

復号化

符号語列
(符号系列)

0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0・・・

情報源符号化に必要な条件

情報源符号化の目的は効率を上げること

（1情報源記号あたりの平均符号長を短くしたい）

情報源記号	確率	C1	C2	C3	C4	C5	C6
A	0.5	0 0	0	0	0	0	0
B	0.25	0 1	1 0	01	01	01	10
C	0.2	1 0	1 1 0	10	10	011	110
D	0.05	1 1	1 1 1 0	0	11	111	111
平均符号長		2.00	1.80	1.45	1.50	1.75	1.75

固定長符号
（等長符号）

可変長符号（非等長符号）

情報源符号化に必要な条件

情報源符号化の目的は効率を上げること

（1情報源記号あたりの平均符号長を短くしたい）

情報源記号	確率	C1	C2	C3	C4	C5	C6
A	0.5	0 0	0	0	0	0	0
B	0.25	0 1	1 0	01	01	01	10
C	0.2	1 0	1 1 0	10	10	011	110
D	0.05	1 1	1 1 1 0	0	11	111	111
平均符号長		2.00	1.80	1.45	1.50	1.75	1.75

カンマ符号

0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0

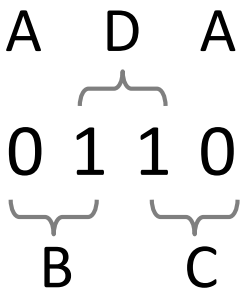
A C D B D

情報源符号化に必要な条件

情報源符号化の目的は効率を上げること

（1情報源記号あたりの平均符号長を短くしたい）

情報源記号	確率	C1	C2	C3	C4	C5	C6
A	0.5	0 0	0	0	0	0	0
B	0.25	0 1	1 0	01	01	01	10
C	0.2	1 0	1 1 0	10	10	011	110
D	0.05	1 1	1 1 1 0	0	11	111	111
平均符号長		2.00	1.80	1.45	1.50	1.75	1.75



特異符号
（singular code）

一意復号不可能な符号

C1,C2,C5,C6は一意復号可能な符号

情報源符号化に必要な条件

情報源符号化の目的は効率を上げること

（1情報源記号あたりの平均符号長を短くしたい）

情報源記号	確率	C1	C2	C3	C4	C5	C6
A	0.5	0 0	0	0	0	0	0
B	0.25	0 1	1 0	01	01	01	10
C	0.2	1 0	1 1 0	10	10	011	110
D	0.05	1 1	1 1 1 0	0	11	111	111
平均符号長		2.00	1.80	1.45	1.50	1.75	1.75

C5の場合

0 1 1 1 1 1 1 0 ・ ・ ・

B D

C D

瞬時に復号できない

非瞬時符号

C6の場合

0 1 1 1 1 1 1 0 ・ ・ ・

A D D

瞬時に復号できる！ 瞬時符号

瞬時符号の条件

C5はなぜ瞬時符号ではなかったか？

ある符号語が，別の符号語の頭の部分に現れている！

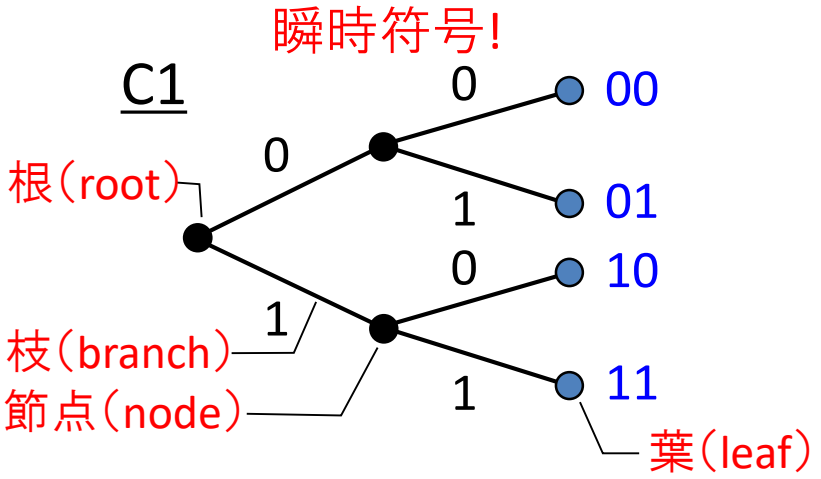
A ⇒ 0，　B ⇒ 01，　C ⇒ 011　← 0を見ただけでは AかBかCか判断できない！

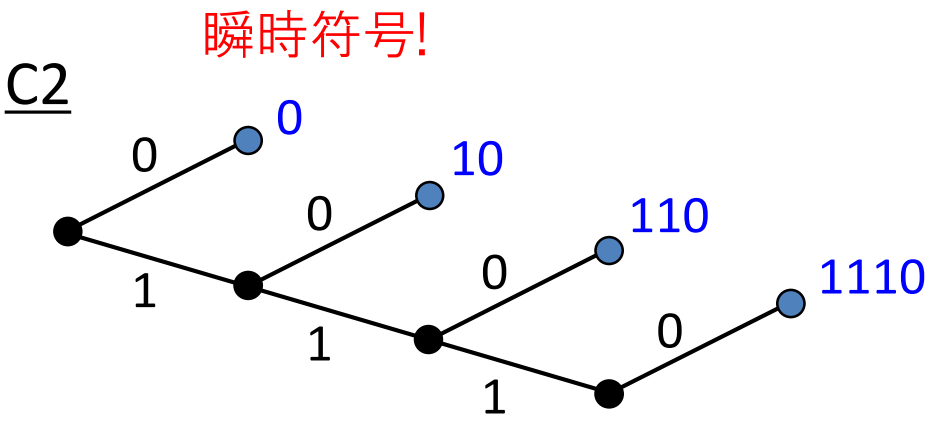
ある符号語 x が別の符号語 y の頭の部分のパターンと一致するとき，x は y の語頭（prefix）という

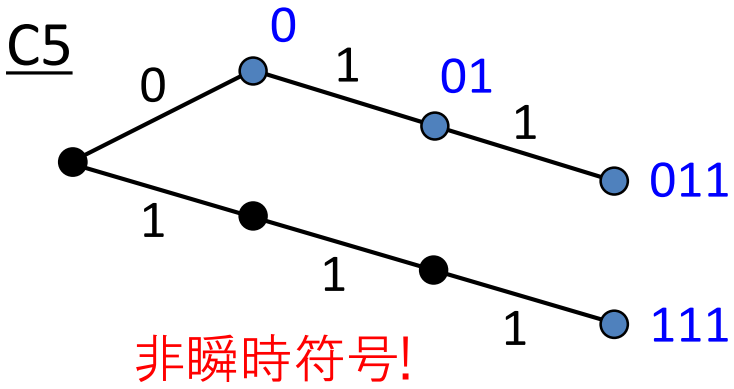
瞬時符号であるためには，どの符号語も他の符号語の語頭であってはならない．これを 語頭条件 という．

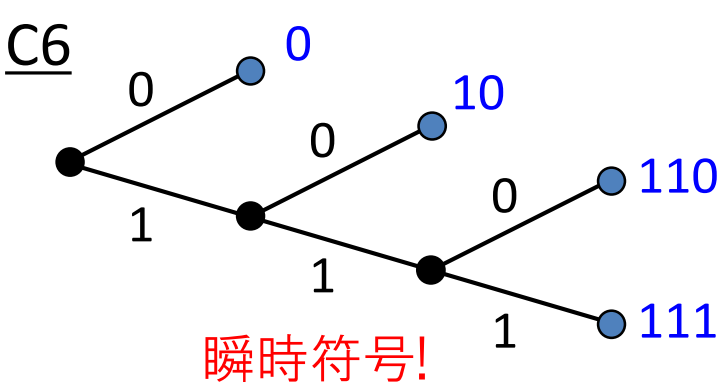
逆に，語頭条件 を満たす符号は瞬時符号となるのは明らか

符号の木と瞬時符号の関係









瞬時符号は，符号語がすべて葉に対応付けられている

非瞬時符号は，葉以外の節点にも対応づけられている

いろいろな符号と要求条件

一意復号可能な符号 (uniquely decodable code)

一意（できれば瞬時）に復号可能なこと

C5
0
0 1
0 1 1
1 1 1

C3
0
0 1
1 0
0

特異符号

瞬時符号 (Instantaneous code)：前から解読可能な符号

等長符号

C1
0 0
0 1
1 0
1 1

カンマ符号

C2
0
1 0
1 1 0
1 1 1 0

ハフマン符号

C6
0
1 0
1 1 0
1 1 1

仕組みが簡単で装置が高速安価なこと

平均符号長が短いこと

C4
0
0 1
1 0
1 1

一意復号不可能な符号

平均符号長はどこまで小さくできる？

情報源アルファベットが$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$で，定常分布が

$$P(a_i) = p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, M)$$

で与えられる定常情報源Sを考える.

これを一意復号可能な2元符号で1記号ずつ符号化する.
このとき，各符号語の長さが$l_1, l_2, \ldots, l_M$とすれば，1情報源記号あたりの平均符号長Lは

$$L = l_1 p_1 + l_2 p_2 + \cdots + l_M p_M = \sum_{i=1}^{M} l_i p_i \ .$$

Lをどこまで小さくできるだろうか？

$l_1, l_2, \ldots, l_M$がそれぞれ短ければ短いほどLは小さくなるが・・・

クラフトの不等式

定理4.1［クラフトの不等式（Kraft's inequality）］

長さが $l_1, l_2, \ldots, l_M$ となる M 個の符号語を持つ q 元符号で瞬時符号となるものが存在するための必要十分条件は

$$q^{-l_1} + q^{-l_2} + \cdots + q^{-l_M} \leq 1 \qquad (4.1)$$

が満たされることである.

「存在する」としか言っていないことに注意
「この不等式を満たすから瞬時符号」とは言えない

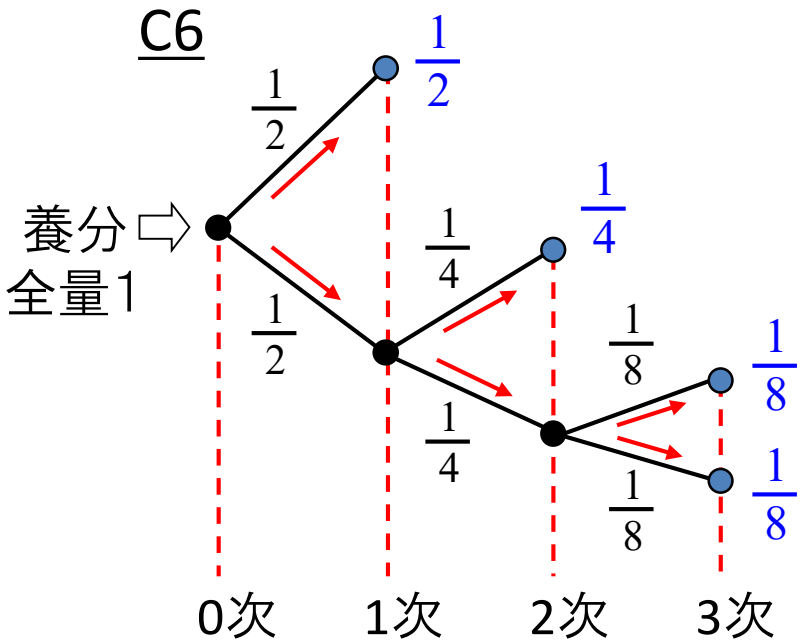
※ 実は一意復号可能である必要十分条件も式(4.1)を満たすことである.
その結果はマクミラン(McMillan)によって導かれたので, マクミランの不等式と呼ぶことがある.

クラフトの不等式の直観的理解

C6よりも効率のよい符号はあるだろうか？

C6は，A, B, C, D → それぞれ 1, 2, 3, 3 の長さの符号語

例えば，1, 2, 2, 3 の長さの符号語を割り当てられるか？



C6の場合，

OK!

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1$$

l 次の各節点には少なくとも2^{-l}の量の養分が達する.

符号語の長さが1, 2, 2, 3 である場合，葉にたまる養分の総量は少なくとも

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = 1.125 > 1.$$

このような瞬時符号は作れない！

Try 練習問題4.1

平均符号長 L の限界に関する定理その1

定理 4.2

定常分布を持つ情報源S の各情報源記号を一意復号可能な r元符号に符号化したとき，その平均符号長Lは

$$\frac{H_1(S)}{\log_2 r} \leq L$$

を満たす．また，平均符号長L が，

$$L < \frac{H_1(S)}{\log_2 r} + 1$$

となるr元瞬時符合を作ることができる．

※　証明は宿題です．教科書に載っています．

n次拡大情報源に適用すると･･･

1記号毎でなく，いくつかの記号をまとめて符号語を割り当てることで，効率よく符号化できないだろうか？

情報源Sのn次拡大情報源S^nに対して定理4.2を適用すると，

$$H_1(S^n) \leq L_n < H_1(S^n) + 1 \qquad (4.5)$$

を満たす平均符号長L_nの2元瞬時符号を作ることができる．

L_nはn次拡大情報源S^nの1記号あたりの平均符号長なので，元のS上の1記号あたりの平均符号長Lは $L = L_n/n$ である．
よって，式(4.5)を n で割って変形すると，

$$H_1(S^n)/n \leq L_n/n < H_1(S^n)/n + 1/n$$

$$\therefore \quad H_n(S) \leq L < H_n(S) + 1/n$$

が得られる．

nを無限大にとばすと･･･

平均符号長 L の限界に関する定理その2

定理 4.3［情報源符号化定理（シャノンの第一基本定理）］

情報源Sは，任意の一意復号可能なr元符号で
符号化する場合，その平均符号長Lは，

$$\frac{H(S)}{\log_2 r} \leq L$$

を満たす．
また，任意の正数$\varepsilon > 0$について平均符号長Lが，

$$L < \frac{H(S)}{\log_2 r} + \varepsilon$$

となるr元瞬時符合を作ることができる．

Claude Shannon (1916 - 2001)
www.ausbcomp.com/~bbott/wik/mmtimeln.htmより

2元符号の場合，
$\log_2 r = 1$

どんなに工夫しても，平均符号長 L はエントロピー$H(S)$までしか改善できない（でもがんばれば，そこまではできる）

今日のまとめ

情報源符号化の基礎概念

- 固定長符号，可変長符号，カンマ符号，特異符号
- 一意復号(不)可能な符号，瞬時符号
- 語頭条件

瞬時符号と符号の木の関係

クラフトの不等式

平均符号長の限界

- 情報源符号化定理： 最短平均符号長に関する定理

次回：

- 効率良い具体的な情報源符号化方法： ハフマン符号

例題4.2：定理4.2の具体例

表4.1で示した情報源について，1次エントロピーを求めると

$$H(S) = -0.5\log_2 0.5 - 0.25\log_2 0.25 - 0.2\log_2 0.2 - 0.05\log_2 0.05$$

$$\fallingdotseq 1.680\ .$$

これが情報源Sの下限である．表4.4の符号C6の平均符号長は 1.75 なので，$H(S)$ よりも確かに大きい．
次に，定理4.2の証明のとおりに l_1, l_2, l_3, l_4 を求めてみよう．
まず，Aに対応する符号語の符号長を l_1 とすると，これは

$$-\log_2 0.5 = 1.0 \leq l_1 < -\log_2 0.5 + 1 = 2.0$$

なので，$l_1 = 1$ となる．同様に，B, C, D に対応する符号語の符号長 l_2, l_3, l_4 を求めると，それぞれ $l_2 = 2, l_3 = 3, l_4 = 5$ となることがわかる．よって，このときの平均符号長 L は

$$L = 0.5 \times 1 + 0.25 \times 2 + 0.2 \times 3 + 0.05 \times 5 = 1.85$$

となる．

表4.1

情報源記号	確率
A	0.5
B	0.25
C	0.2
D	0.05

効率はよくない

Try 練習問題4.2