講義「情報理論」

第10回　通信路符号化の限界(1)

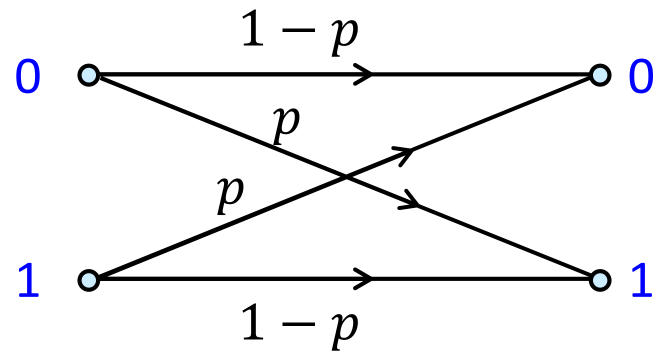
情報理工学部門 情報知識ネットワーク研究室
喜田拓也

記憶のない通信路(おさらい)

2元対称通信路(binary symmetric channel; BSC)

2重に一様

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} & \\
T = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}
\end{array}
$$



2元対称消失通信路

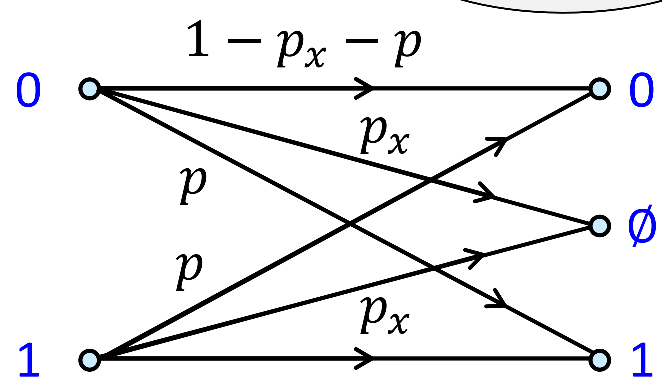
入力アルファベットは $\{0,1\}$

出力アルファベットは $\{0,1,\emptyset\}$

($\emptyset$は消失を表現)

入力に対して一様

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} 0 & \emptyset & 1 \end{array} & \\
T = \begin{bmatrix} 1-p_x-p & p_x & p \\ p & p_x & 1-p_x-p \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}
\end{array}
$$



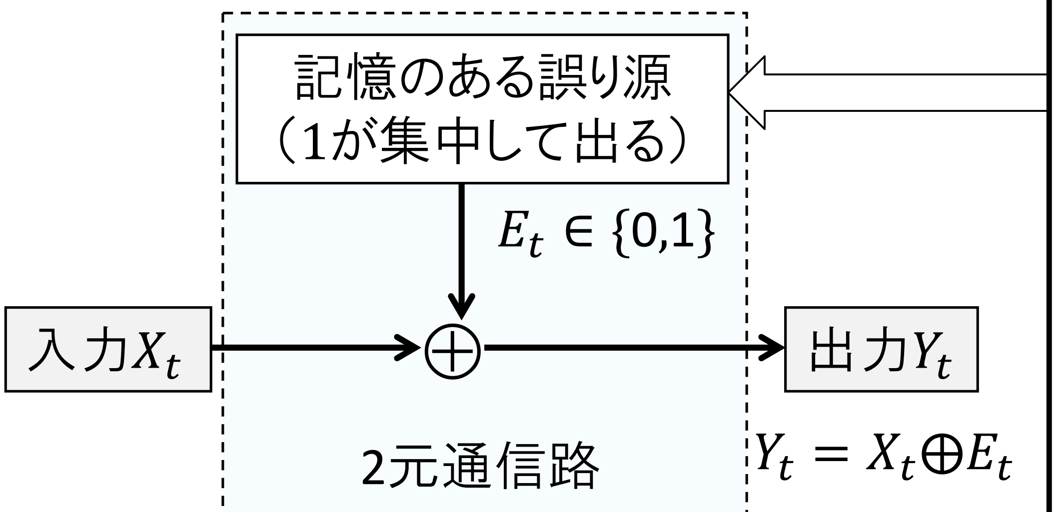
バースト誤り通信路(おさらい)

誤りが一度生じると，その後しばらくの間は連続して誤りが発生すると考えるモデル（誤り源に記憶がある代表的なモデル）

密集して生じる誤りをバースト誤り(burst error)と呼ぶ

例えば，誤り源から発信される系列が次のようになる

0000000111111100001111 0000・・・ （ソリッドバーストの例）



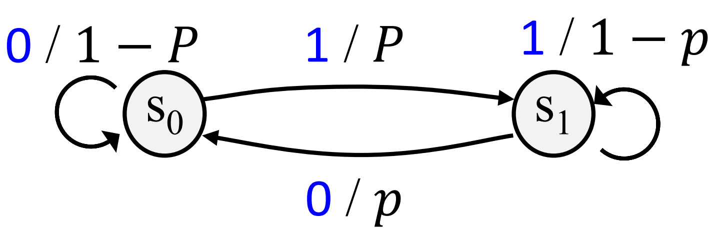


図6.4 単純マルコフ情報源として表される誤り源

Pが大 ⇒バースト発生頻度が増大
pが大 ⇒バーストが短くなる

今日の内容

7.1 通信路符号化

7.2 通信路容量

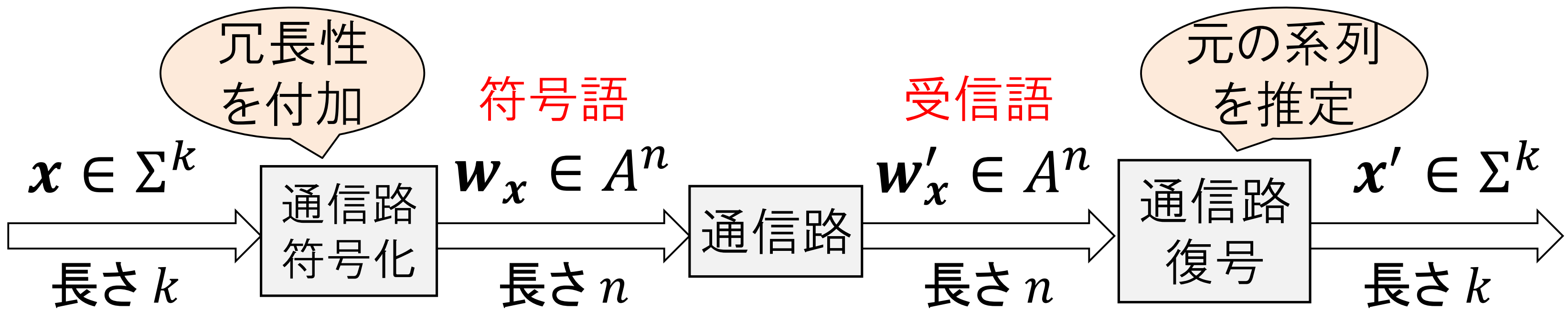
通信路符号化に求められること

誤りのない通信路はない！

- ある程度小さい誤りであれば，元に戻せるようにしたい
- 元に戻せなくとも，誤りがあるかどうかが分かるようにしたい

通信路符号化の考え方

送る記号列に冗長性を加えると，通信途中で一部が変わっても，
受信側でその冗長性を利用して送られた情報を推定できる！



入力･出力アルファベットが共に A $(|A| = r)$の通信路を考える
この通信路を使って q元情報源$(|\Sigma| = q)$の系列を送る
通信路符号化は，入力されるq元記号列を長さ k 毎に区切り，
各ブロックに長さ n の等長なr元記号列を割り当てることで行う
符号化されたr元記号列$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}$を符号語と呼ぶ
通信路から受け取るr元記号列$\boldsymbol{w}'_{\boldsymbol{x}}$を受信語と呼ぶ

通信路復号の考え方

符号語どうしが空間内で十分に離れていれば，受信語に少しの誤りが含まれていても，それに近い符号語へと修正すればよい

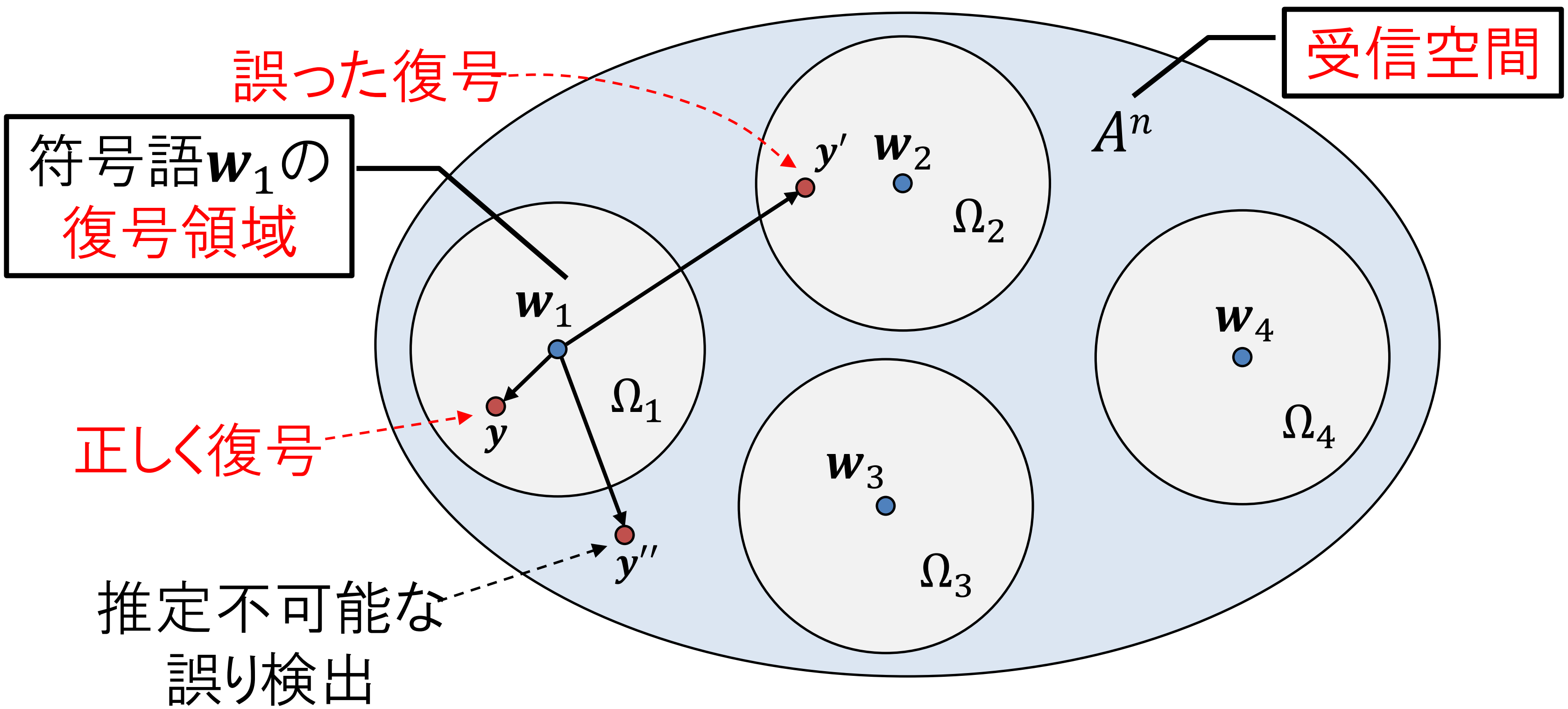


図7.2 通信路復号の基礎概念

例7.1（前半）

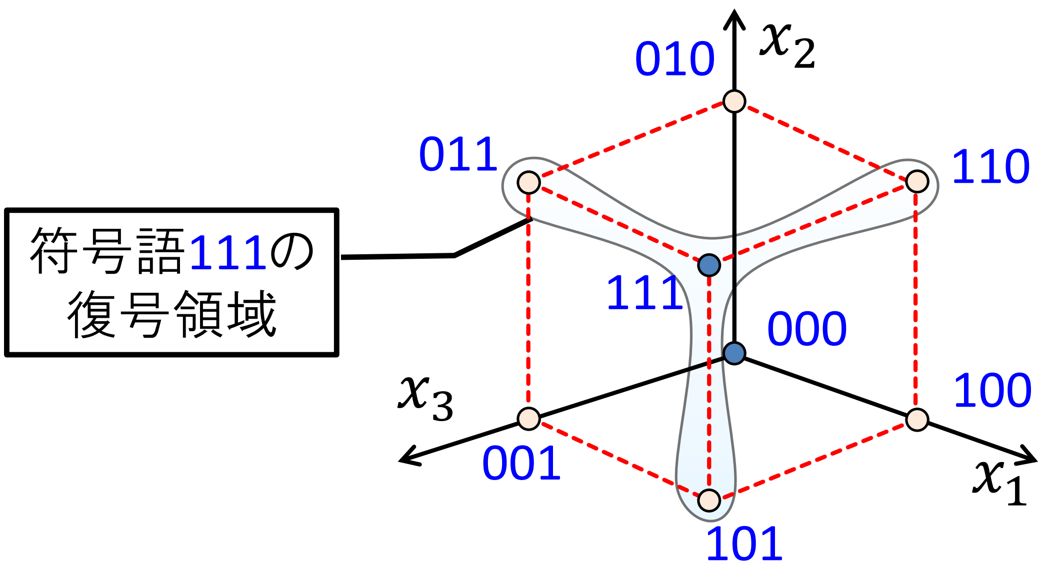
長さ3の符号語として，000 と 111 の二つだけを選んで

$$0 \to 000, \qquad 1 \to 111$$

と符号化する通信路符号化を考える．受信空間A^3は

$$A^3 = \{0,1\}^3 = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}.$$

復号は3ビットの多数決で行う．すなわち，000と111の復号領域はそれぞれ，{000, 001, 010, 100}と{011, 101, 110, 111}である



情報速度・符号化率・冗長度

M個の符号語が等確率で送られると仮定すると,

$$R = \frac{-\log_2 M^{-1}}{n} = \frac{\log_2 M}{n}$$（ビット／記号）　$\left(= \frac{k}{n}\ \text{2元系列の場合}\right)$

の速度で情報を伝達できる. このRを符号の情報速度と呼ぶ.

r^n個の記号列すべてを符号語とすると, 情報速度は最大になる.

$$R_{max} = (\log_2 r^n)/n = \log_2 r\ .$$

$R < R_{max}$とすることで, 誤りの訂正や検出が可能となる！

情報速度Rの符号Cに対し,

$$\eta = R/R_{max} = \log_2 M/(n \log_2 r)$$

$0 < \eta < 1$

を, 符号Cの効率または符号化率(code rate)と呼ぶ. また,

$$\rho = 1 - \eta$$

を符号Cの冗長度という.

冗長度と効率はTrade-off

例7.1（後半）　―練習―

長さ3の符号語として，000 と 111 の二つだけを選んで

$$0 \to 000, \qquad 1 \to 111$$

と符号化する先の例の通信路符号化について，

情報速度は，

$$R = \boxed{}$$

効率は，

$$\eta = \boxed{}$$

よって冗長度ρは，

$$\rho = \boxed{}$$

最尤復号法(maximum likelihood decoding)

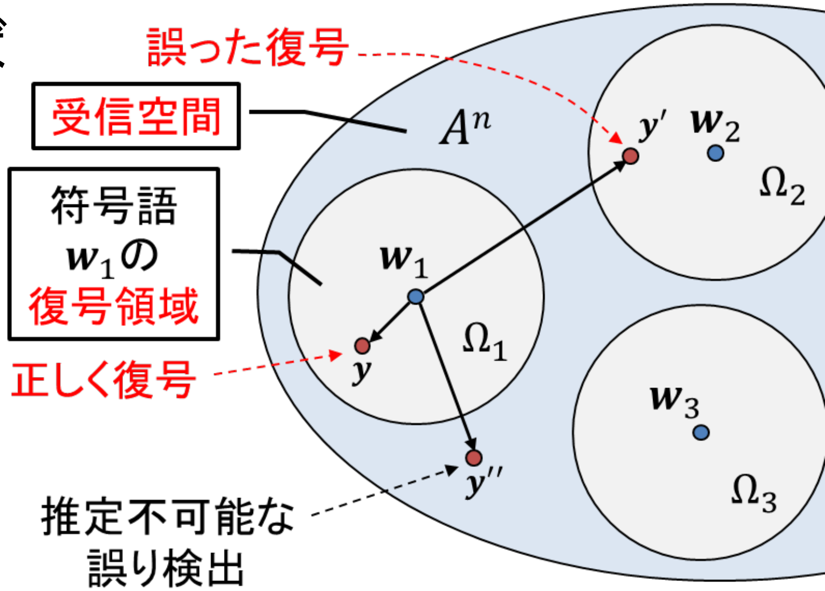
符号語 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_M$に対する復号領域$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$を，どのようにして定めればよいだろうか？

一つの方法は，正しく復号される確率P_Cを復号の「良さ」の評価として用い，P_C を最大とするような復号領域をとることだろう

符号語 $\boldsymbol{w}_i$ を送ったとき，受信語 $\boldsymbol{y}$ が，$\boldsymbol{w}_i$ に対応する復号領域 Ω_i に属せば正しく復号される.
したがって，$\boldsymbol{w}_i$ を送ったとき，正しく復号される確率は

$$P_C(\boldsymbol{w}_i) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \Omega_i} P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_i)$$

となる.

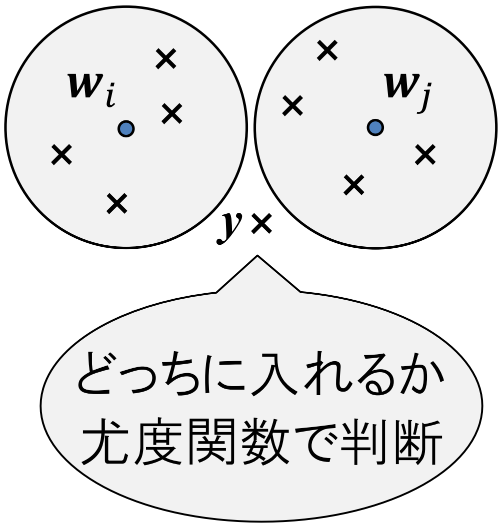


最尤復号法(つづき)

どの符号語が送られてくる確率も等しく $1/M$ であると仮定する.
このとき，すべての符号語$\boldsymbol{w}_i$について，$P_C(\boldsymbol{w}_i)$ の平均は

$$P_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_C(\boldsymbol{w}_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{\boldsymbol{y}\in\Omega_i} P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_i).$$

これを最大にするには，$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_i)$が$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_j)$ $(j = 1, \ldots, M)$の中で最大となるような $\boldsymbol{y}$ の集合をΩ_iとすればよい.

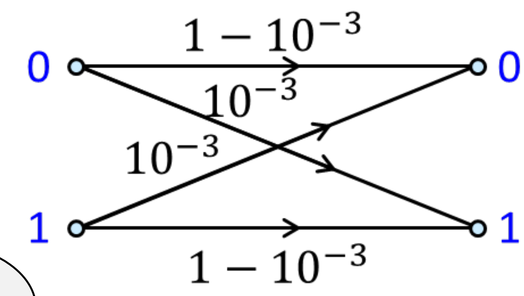


$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_i)$ は $\boldsymbol{y}$ を固定して，$\boldsymbol{w}_i$の関数とみたとき**尤度関数**というので，このような復号法を**最尤度復号法**と呼ぶ.

最尤度復号法は，正しく復号される確率 P_C を最大とするという意味で，**最良の復号法**である. しかし，すべての符号語$\boldsymbol{w}_i$に対し，$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_i)$を計算し比較する必要があり，符号語数$M$が大きい場合には，**実際上非常に難しい.**

問7.1

符号$C=\{000,111\}$を使ってビット誤り率10^{-3}の2元対称通信路を介して情報を送る．最尤復号法を用いた場合の符号語000,111の復号領域を求めよ．



（答え） 2元対称通信路は記憶のない通信路だから，
例えば符号語000を送り込んで，010が出る確率は，

$$P(010|000)=(1-10^{-3})^2 10^{-3}$$

2回正
1回誤

である．同様に，受信語$\boldsymbol{y}$に含まれる誤りの個数で場合わけすると，

$$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w})=\begin{cases}(1-10^{-3})^3 & 0\text{ 個のとき}\\(1-10^{-3})^2 10^{-3} & 1\text{ 個のとき}\\(1-10^{-3})10^{-6} & 2\text{ 個のとき}\\10^{-9} & 3\text{ 個のとき}\end{cases}$$

上から順に
0.997,
0.000998,
0.000000999,
0.000000001

最尤復号法では誤りが小さい符号語のほうへ復号するので，000,111の復号領域は{000,001,010,100}, {011,101,110,111}となる．これは例7.1と同じ復号領域になっている．

ちょっと休憩

通信路を通して伝送される情報の量

送信側
$A=\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$
$p_i = P_X(a_i)$

$\xrightarrow{X}$

記憶のない
通信路

$p_{ij} = P(b_j | a_i)$

$\xrightarrow{Y}$

受信側
$B=\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$
$q_j = P_Y(b_j)$

通信路を通して伝送される情報量は，相互情報量 $I(X;Y)$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i \sum_{j=1}^{s} p_{ij} \log_2 \left(\frac{p_{ij}}{q_j} \right)$$

$H(X)$: 入力側が送信した1記号あたりの情報の量

$H(X|Y)$: Yを受信した後にも未だ残っているXに関するあいまいさの量

（q_jは出力記号b_jの生起確率$P_Y(b_j)$で，$q_j = \sum_{i=1}^{r} p_i p_{ij}$）

この通信路で最大限どれだけの情報量が伝送できるだろうか？

通信路容量(channel capacity)

$T=[p_{ij}]$ は通信路によって決まるので，相互情報量 $I(X;Y)$ は入力確率分布 $P_X=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$ にのみ依存して増減する

記憶のない定常通信路の通信路容量(定理7.1より)

$$C=\max_{P_X\in\mathbf{P}}\{I(X;Y)\}$$

(単位は，ビットあるいはビット/通信路記号)

$p_1,p_2,\ldots,p_r$を様々に変えたときの$I(X;Y)$の最大値

通信路に記憶がある場合の通信路容量

拡大情報源を考える．すなわち，長さ n の入力系列をX_n，出力系列をY_nとし，P_{X_n} をX_nの確率分布とすれば，

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[\max_{P_{X_n}\in\mathbf{P}^n}\left\{\frac{1}{n}I(X_n;Y_n)\right\}\right].$$

記憶のない通信路の通信路容量(定理7.1)

入力について一様な，記憶のない通信路の通信路容量を求める.
相互情報量$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)$において，$H(Y|X)$ は,

$$H(Y|X)=-\sum_{x}P(x)\sum_{y}P(y|x)\log_2 P(y|x)$$

$$=-\sum_{i=1}^{r}p_i\sum_{j=1}^{s}p_{ij}\log_2 p_{ij}$$

$$=-\sum_{j=1}^{s}p_{1j}\log_2 p_{1j} \ .$$

入力に対して一様なので，
任意のi について2番目の和は
i から見て定数

$$C\cdot\sum_{i=1}^{r}p_i=C$$

$$\sum_{j=1}^{s}p_{1j}\log_2 p_{1j}=\sum_{j=1}^{s}p_{2j}\log_2 p_{2j}=\sum_{j=1}^{s}p_{3j}\log_2 p_{3j}=\cdots$$

記憶のない通信路の通信路容量(つづき)

したがって，入力に一様な記憶のない通信路の通信路容量Cは，

$$C = \max_{P_X \in \mathbf{P}}\{I(X;Y)\} = \max_{P_X \in \mathbf{P}}\{H(Y) - H(Y|X)\}$$

$$= \max_{P_X \in \mathbf{P}}\{H(Y)\} + \sum_{j=1}^{s} p_{1j} \log_2 p_{1j} .$$

通信路にのみ依存する部分

≤ 0

さらに出力についても一様な場合(2重に一様な場合)，入力側の確率分布を $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$ とすると，出力側の確率分布も $q_1 = q_2 = \cdots = q_s$ となり，$H(Y)$はその最大値$\log_2 s$をとる．

$$C = \log_2 s + \sum_{j=1}^{s} p_{1j} \log_2 p_{1j} .$$

例題7.1) 2元対称通信路の通信路容量

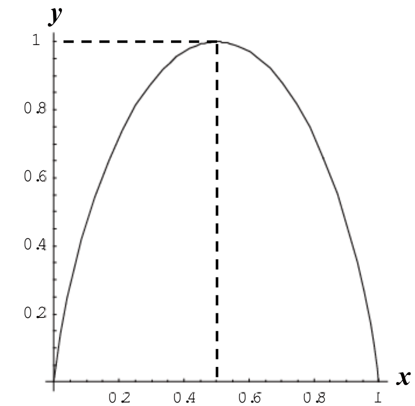
ビット誤り率pの2元対称通信路に，確率qで１となるような入力記号Xを与えたときの出力記号をYとする.

（1）出力記号Yが１となる確率$P_Y(1)$を求めよ.

$$P_Y(1) = P_X(0)P_{Y|X}(1|0) + P_X(1)P_{Y|X}(1|1)$$
$$= (1-q)p + q(1-p) = p + q - 2pq.$$

（2）出力記号Yのエントロピー$H(Y)$を求めよ.

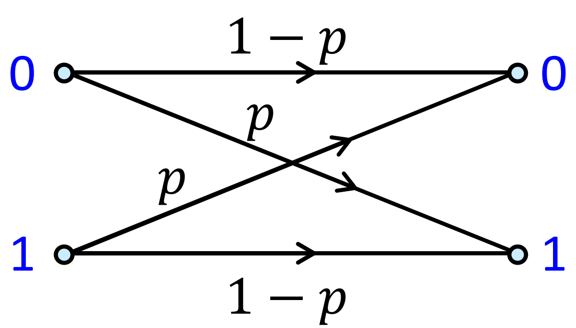
$$H(Y) = \mathcal{H}(p + q - 2pq).$$



エントロピー関数$\mathcal{H}(x)$

（3）出力記号のエントロピー$H(Y)$をqの関数とみたとき，$H(Y)$の最大値を求めよ.

$q = 1/2$とすれば，$p + q - 2pq = 1/2$となり，$H(Y)$は最大値1をとる.
（エントロピー関数の形に着目する）



2元対称通信路

例題7.1) 2元対称通信路の通信路容量

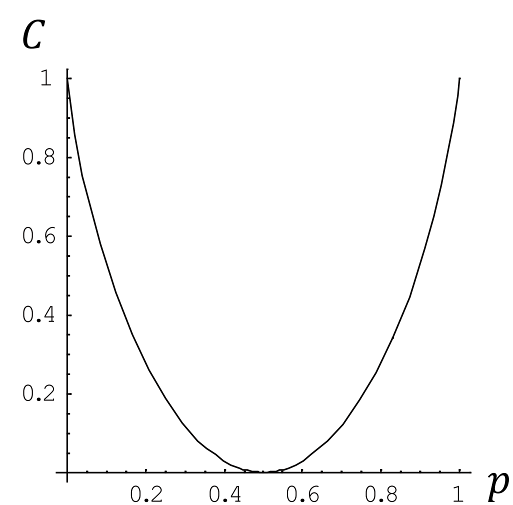
（4）入力記号Xで条件をつけた出力記号Yのエントロピー$H(Y|X)$を求めよ.

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= P_X(0)H(Y|0) + P_X(1)H(Y|1) \\
&= (1-q)\mathcal{H}(p) + q\mathcal{H}(p) \\
&= \mathcal{H}(p).
\end{aligned}
$$

入力に0を入れたとき
出力が0,1になる確率
はそれぞれ$p, 1-p$な
ので，$H(Y|0) = \mathcal{H}(p)$.
$H(Y|1)$も同様に$\mathcal{H}(p)$

（5）通信路容量Cを求めよ.

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{0 \le q \le 1} I(X;Y) \\
&= \max_{0 \le q \le 1} [H(Y) - H(Y|X)] \\
&= \max_{0 \le q \le 1} [H(Y)] - \mathcal{H}(p) \quad \text{(4)より} \\
&= 1 - \mathcal{H}(p). \quad \text{(3)より}
\end{aligned}
$$

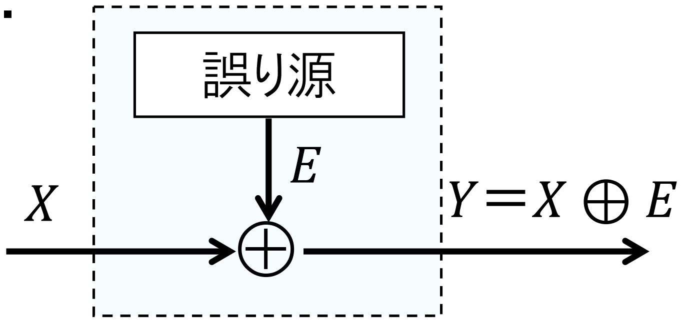


2元対称通信路の通信路容量

Try 練習問題7.1

加法的2元通信路の通信路容量(定理7.3)

右図のような加法的2元通信路を考える.



加法的2元通信路

XとYの相互情報量は,

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= H(Y) - H(X \oplus E|X) \\
&= H(Y) - H(E|X) \\
&= H(Y) - H(E).
\end{aligned}
$$

よって，通信路容量Cを求めるには，入力Xの確率分布に関して$H(Y)$を最大にすればよい．ところが，$P_X(0) = P_X(1) = 1/2$とすると，Eがどのようなものであっても$P_Y(0) = P_Y(1) = 1/2$となる.

このとき，$H(Y)$はその最大値1をとる. したがって，通信路容量は

$$C = 1 - H(E)$$

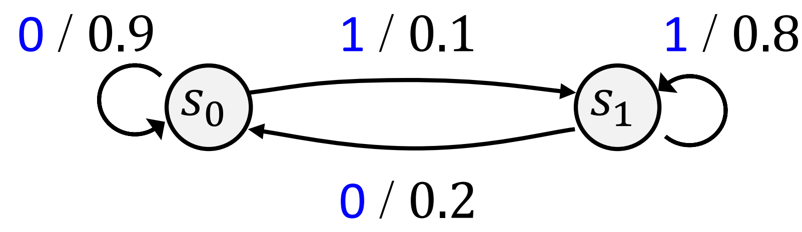
となる.

誤りがない場合に伝達し得る最大の情報量

誤り源のエントロピー$H(E)$（ビット/記号）

例題7.2(改; $P = 0.1, p = 0.2$ ver.)

誤り源が右図のマルコフ情報源で表される加法的2元通信路の通信路容量Cを求めよ.



誤り源のモデル

この誤り源Eのエントロピーは,

$$H(E) = P(s_0)\mathcal{H}(0.1) + P(s_1)\mathcal{H}(0.8).$$

ここで, $P(s_0), P(s_1)$はそれぞれ, 定常分布時に状態s_0, s_1にいる確率であり, それぞれ, 2/3, 1/3 となる. これから,

$$H(E) \fallingdotseq 2/3 \times 0.4690 + 1/3 \times 0.7219 \fallingdotseq 0.5532.$$

したがって, 通信路容量Cは,

$$C = 1 - H(E) \fallingdotseq 1 - 0.5532 \fallingdotseq 0.447\text{(ビット/記号)}.$$

ちなみに, この通信路のビット誤り率は 1/3 である.

もしも通信路に記憶がなく, ランダムに誤りを発生するのであれば, $C = 1 - \mathcal{H}(1/3) = 0.0817$(ビット/記号)であり, 0.447よりはるかに小さいものとなる.

Try 練習問題7.2

今日のまとめ

7.1 通信路符号化

情報速度･符号化率･冗長度

最尤復号法

7.2 通信路容量

（記憶のない場合）$C = \max_{P_X \in \mathbf{P}} \{ I(X;Y) \}$

（記憶のある場合）$C = \lim_{n \to \infty} \left[\max_{P_{X_n} \in \mathbf{P}_n} \left\{ \frac{1}{n} I(X_n;Y_n) \right\} \right]$

記憶のない一様通信路の通信路容量

例題7.1) 2元対称通信路の通信路容量

加法的2元通信路の通信路容量

記憶のある通信路の通信路容量

次回

通信路符号化の限界(2) ― 通信路符号化定理