

【1】

(ア) × ; 出力記号 Y_t が入力記号 X_t にのみ依存するような通信路である.

(イ) ○

(ウ) ○

(エ) ○

(オ) ○

(カ) ○

(キ) × ; 記憶のあるほうが通信路容量は大きい.

(ク) × ; 復号を誤る可能性は 0 にはならない.

(ケ) × ; 訂正できるのは 1 個の誤りまで.

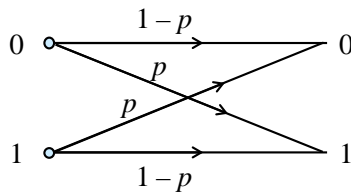
(コ) × ; 検査ビットが 4 個なら符号語長は 15 ビット.

【2】

i) 通信路行列は

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

となる. 通信路線図は, 以下のとおり.



ii) X の確率分布 $P_X(0) = 1 - q, P_X(1) = q$ に対して, Y の確率分布は

$$P_Y(0) = (1-p)(1-q) + pq, P_Y(1) = 1 - (1-p)(1-q) - pq$$

となるので, Y に関するエントロピー $H(Y)$ は,

$$\begin{aligned} H(Y) = & -((1-p)(1-q) + pq) \\ & \log_2((1-p)(1-q) + pq) \\ & - (1 - (1-p)(1-q) - pq) \\ & \log_2(1 - (1-p)(1-q) - pq) \end{aligned}$$

とかける. エントロピー関数を使うと, $h((1-p)(1-q) + pq)$ となる.

iii) $X = 0$ で条件付けた Y に関するエントロピー $H(Y|0)$ は,

$$H(Y|0) = -(1-p) \log_2(1-p) - p \log_2 p$$

である. 一方, $X = 1$ で条件づけたエントロピー $H(Y|1)$ は,

$$H(Y|1) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)$$

となる. よって, 入力で重み付けした平均値が X で条件づけたエントロピー $H(Y|X)$ となり,

$$\begin{aligned} H(Y|X) = & (q + (1-q))(-p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)) \\ = & -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p) \end{aligned}$$

となる. エントロピー関数を使うと $h(p)$ となる.

iv) 相互情報量は $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = h((1-p)(1-q) + pq) - h(p)$ となる.

v) 2元対称通信路は入力・出力に関して一様なので、入力 X の確率分布を等確率にすれば、出力 Y の確率分布も等確率になり、このとき出力エントロピー $H(Y)$ は最大となる. したがって、iv) の式が最大になるのは $q = 0.5$ のときである.

vi) 最大値 (通信路容量) は、 $q = 0.5$ を iv) の式に代入すると、 $1 - h(p)$ と求まる.

vii) vi) の式で通信路容量が最小となるのは $p = 0.5$ のときで、そのとき通信路容量は0となる.

viii) vi) の式に、 $p = 0.2$ を代入して求める. すなわち、

$$\begin{aligned} 1 - h(0.2) &= 1 - \left(-\frac{2}{10} \log_2 \frac{2}{10} - \frac{8}{10} \log_2 \frac{8}{10} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{10} (2(\log_2 2 - \log_2 10) + 8(\log_2 8 - \log_2 10)) \\ &\approx 1 + \frac{1}{10} (2(1 - 3.322) + 8(3 - 3.322)) \\ &\approx 0.278 \text{ ビット/通信路記号} \end{aligned}$$

【3】

i) 情報ビット0011に対して検査ビットを計算すると、

$$\begin{cases} c_1 = 0 & + 1 + 1 = 0, \\ c_2 = 0 + 0 + 1 & = 1, \\ c_3 = & 0 + 1 + 1 = 0, \end{cases}$$

となる. したがって、符号語は 0011010 となる.

ii) パリティ検査方程式は、検査ビットの式から次のようになる.

$$\begin{array}{rcl} w_1 & + w_3 + w_4 + w_5, & = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 & & + w_6 = 0 \\ & w_2 + w_3 + w_4 & + w_7 = 0 \end{array}$$

iii) シンドロームを計算すると、1111001

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 & + 1 + 1 & + 0 & = 1, \\ s_2 &= 1 + 1 + 1 & & + 0 & = 1, \\ s_3 &= & 1 + 1 + 1 & & + 1 = 0. \end{aligned}$$

よって、シンドロームパターンは 110 なので、誤りは e_1 と推定できる. したがって、元の情報記号列は 0111001 であり、すなわち元の情報ビットは0111 であると推定できる.

iv) 符号語のハミング重みの最小値が3であることから、このハミング符号の最小距離は3となる. したがって、1個の誤り訂正を行うようにすると、それ以上の誤り検出を行うことができない (つまり、2個の誤りは検出できなくなる). しかしながら、復号領域を確保せずに、誤り訂正を行わないならば、2個までの誤りを検出することができる.